

Ekonometria

Modele dynamiczne

Paweł Cibis
pawel@cibis.pl

20 maja 2007

- 1 Wyodrębnianie tendencji rozwojowej
 - Funkcje trendu
 - Trend pełzający
 - Średnia ruchoma
- 2 Analiza wahań sezonowych
 - Etap I – Wyodrębnienie tendencji rozwojowej
 - Etap II – Uwolnienie wyrazów szeregu empirycznego od trendu
 - Etap III – Eliminacja wahań przypadkowych
 - Etap IV – Obliczanie czystych wskaźników wahań sezonowych
- 3 Wyznaczanie prognozy
 - Ostateczna postać modelu
 - Błąd prognozy ex post
- 4 Literatura

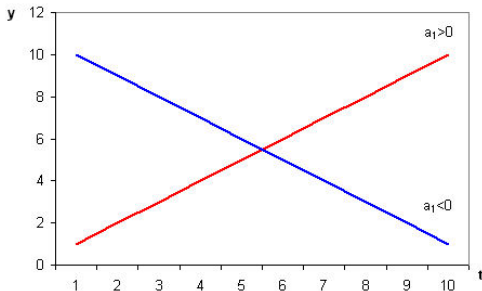
- 1 Wyodrębnianie tendencji rozwojowej
 - Funkcje trendu
 - Trend pełzający
 - Średnia ruchoma
- 2 Analiza wahań sezonowych
 - Etap I – Wyodrębnienie tendencji rozwojowej
 - Etap II – Uwolnienie wyrazów szeregu empirycznego od trendu
 - Etap III – Eliminacja wahań przypadkowych
 - Etap IV – Obliczanie czystych wskaźników wahań sezonowych
- 3 Wyznaczanie prognozy
 - Ostateczna postać modelu
 - Błąd prognozy ex post
- 4 Literatura

Funkcje trendu – Postać ogólna

$$y = f(t) + \varepsilon$$

$$\hat{y} = f(t)$$

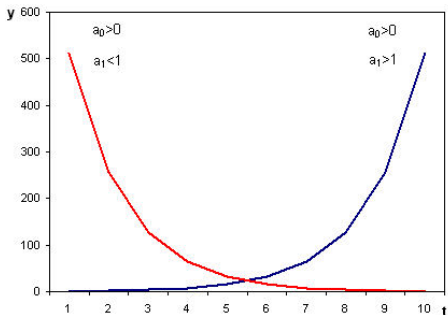
Funkcje trendu – Trend liniowy



$$\hat{y} = a_0 + a_1 t$$

a_0 – wyrównany poziom zjawiska Y w okresie zerowym,
 a_1 – przeciętny przyrost zjawiska Y w przedziale czasu $[1, n]$.

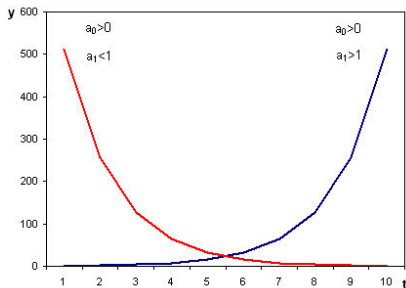
Funkcje trendu – Trend wykładniczy



$$\hat{y} = a_0 a_1^t$$

a_0 – wyrównany poziom zjawiska Y w okresie zerowym,
 a_1 – średni łańcuchowy wskaźnik dynamiki badanego zjawiska Y w przedziale czasu $[1, n]$.

Funkcje trendu – Trend wykładniczy



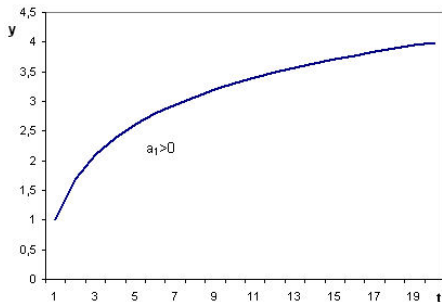
$$\hat{y} = a_0 a_1^t$$

$$\ln \hat{y} = \ln a_0 + t \ln a_1$$

$$\hat{y}' = \ln \hat{y}, \quad a'_0 = \ln a_0, \quad a'_1 = \ln a_1$$

$$\hat{y}' = a'_0 + a'_1 t$$

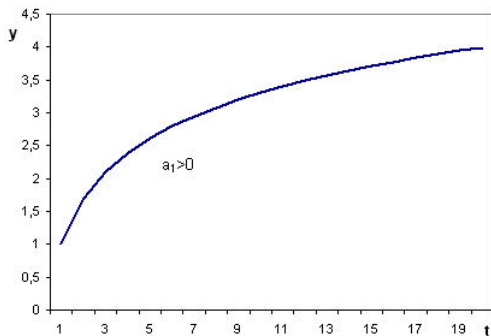
Funkcje trendu – Trend logarytmiczny



$$\hat{y} = a_0 + a_1 \ln t$$

a_0 – wyrównany poziom zjawiska Y w okresie zerowym,
Przyrosty zjawiska maleją w czasie.

Funkcje trendu – Trend logarytmiczny

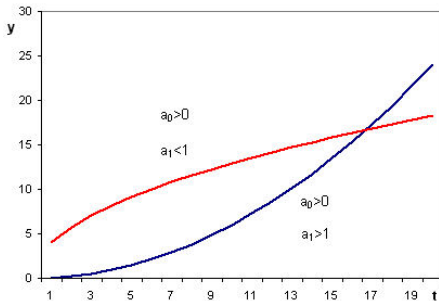


$$\hat{y} = a_0 + a_1 \ln t$$

$$t' = \ln t$$

$$\hat{y}' = a'_0 + a'_1 t$$

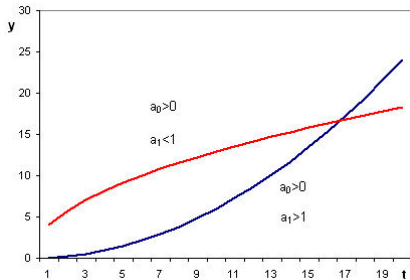
Funkcje trendu – Trend potężowy



$$\hat{y} = a_0 t^{a_1}$$

a_0 – wyrównany poziom zjawiska Y w okresie $t = 1$,
Stosowany w modelach o liniowym związku między logarytmami
zmiennych Y i t .

Funkcje trendu – Trend potęgowy



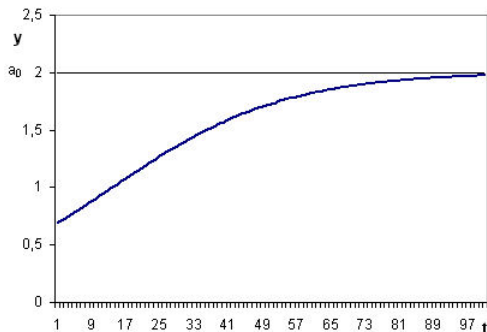
$$\hat{y} = a_0 t^{a_1}$$

$$\ln \hat{y} = \ln a_0 + a_1 \ln t$$

$$\hat{y}' = \ln \hat{y}, \quad t' = \ln t, \quad a'_0 = \ln a_0$$

$$\hat{y}' = a'_0 + a_1 t'$$

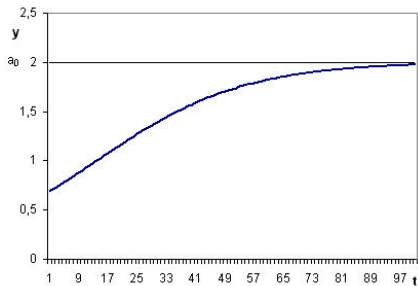
Funkcje trendu – Trend logistyczny



$$\hat{y} = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-t}}, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 1$$

a_0 – poziom nasycenia badanego zjawiska.

Funkcje trendu – Trend logistyczny

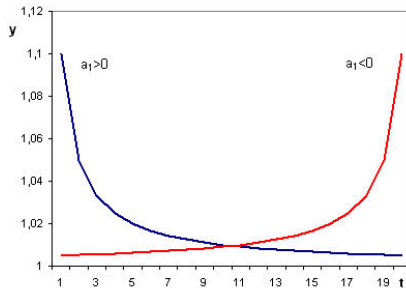


$$\hat{y} = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-t}}, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 1$$

$$a'_0 = \frac{1}{a_0}, \quad a'_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad \hat{y}' = \frac{1}{\hat{y}}, \quad t' = e^{-t}$$

$$\hat{y}' = a'_0 + a'_1 t'$$

Funkcje trendu – Trend hiperboliczny

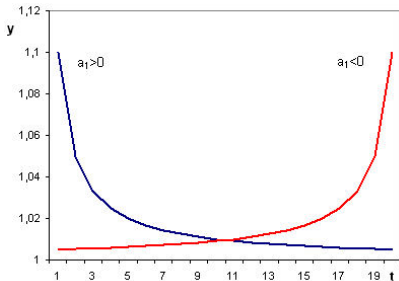


$$\hat{y} = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

$$t' = \frac{1}{t}$$

$$\hat{y} = a_0 + a_1 t'$$

Funkcje trendu – Trend hiperboliczny



$$\hat{y} = \frac{a_0 t}{t + a_1}$$

$$a'_0 = \frac{1}{a_0}, \quad a'_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad t' = \frac{1}{t}, \quad \hat{y}' = \frac{1}{\hat{y}}$$

$$\hat{y}' = a'_0 + a'_1 t'$$

Trend pełzający

Metoda adaptacyjna – stosowana, gdy trend w miarę upływu czasu podlega zmianom.

- 1 Ustalamy długość segmentu k .
- 2 Rozpatrujemy $n - k + 1$ k -elementowych ciągów kolejnych obserwacji: $y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+k-1}$.
- 3 Dla każdego ciągu szacujemy z KMNK parametry liniowe trendów segmentowych: $\hat{y}^l = a_0^l + a_1^l t$, gdzie $t = l, l + 1, \dots, l + k - 1$.
- 4 Dla każdego równania trendu odcinkowego obliczamy teoretyczne wartości zmiennej Y .
- 5 Obliczamy średnie arytmetyczne dla wartości teoretycznych zmiennej Y z tych samych okresów. Otrzymamy szereg czasowy wygładzony za pomocą trendu pełzającego.

Średnia ruchoma

Metoda adaptacyjna – stosowana, gdy trend w miarę upływu czasu podlega zmianom.

- 1 Ustalamy długość okresu średniej k .
- 2 Dla kolejnych okresów obliczamy średnie arytmetyczne k -okresowe:

- $\bar{y}_{\frac{k-1}{2}+i} = \frac{y_i + y_{i+1} + \dots + y_{k+i-1}}{k}$, dla k nieparzystych oraz $i \in 1, 2, \dots, n - k + 1$;
- $\bar{y}_{\frac{k}{2}+i} = \frac{\frac{1}{2}y_i + y_{i+1} + \dots + \frac{1}{2}y_{k+i}}{k}$, dla k parzystych oraz $i \in 1, 2, \dots, n - k + 1$ (średnie scentrowane).

- 3 Otrzymane średnie przyporządkowuje się wyrazowi środkowemu.

Średnią k -okresową stosujemy Do eliminacji wahań okresowych o cyklu długości k .

- 1 Wyodrębnianie tendencji rozwojowej
 - Funkcje trendu
 - Trend pełzający
 - Średnia ruchoma
- 2 Analiza wahań sezonowych
 - Etap I – Wyodrębnienie tendencji rozwojowej
 - Etap II – Uwolnienie wyrazów szeregu empirycznego od trendu
 - Etap III – Eliminacja wahań przypadkowych
 - Etap IV – Obliczanie czystych wskaźników wahań sezonowych
- 3 Wyznaczanie prognozy
 - Ostateczna postać modelu
 - Błąd prognozy ex post
- 4 Literatura

Etap I – Wyodrębnienie tendencji rozwojowej

Wyodrębniamy tendencję rozwojową za pomocą dowolnej metody:

- trendu liniowego;
- trendu nieliniowego;
- trendu pełzającego;
- średniej ruchomej.

Etap II – Uwolnienie wyrazów szeregu empirycznego od trendu

- Jeżeli odchylenia od trendu w tych samych okresach jednego cyklu są mniej więcej stałe (bezwzględne wahania sezonowe), obliczamy: $e_t = y_t - \hat{y}_t$.
- Jeżeli w miarę wzrostu wartości trendu proporcjonalnie wzrastają odchylenia (względne wahania sezonowe) – ilorazy są mniej więcej stałe – obliczamy stosunki: $u_t = \frac{y_t}{\hat{y}_t}$.

Wartości e_t i u_t zawierają wahania sezonowe i przypadkowe.

W praktyce łatwiej jest najpierw policzyć oba wskaźniki, a następnie, na podstawie tego, w którym z wariantów są one mniej więcej stałe dla danej fazy cyklu, zdecydować o rodzaju wahań okresowych.

Etap III – Eliminacja wahań przypadkowych

Dla każdego okresu cyklu obliczamy średnią arytmetyczną z tych wartości e_t lub u_t , które należą do danej fazy. Otrzymamy surowe wskaźniki wahań sezonowych:

- \bar{e}_j – bezwzględne wskaźniki sezonowości (addytywne) – o ile jednostek poziom zjawiska w danej fazie wahań jest wyższy lub niższy od poziomu, jaki osiągnęłoby zjawisko, gdyby jego rozwój następował zgodnie z tendencją rozwojową;
- \bar{u}_j – względne wskaźniki sezonowości (multiplikatywne) – o ile procent poziom zjawiska w danej fazie wahań jest wyższy lub niższy od poziomu, jaki osiągnęłoby zjawisko, gdyby jego rozwój następował zgodnie z tendencją rozwojową.

j – numer fazy wahań

Etap IV – Obliczanie czystych wskaźników wahań sezonowych

Obliczamy współczynniki korekcyjne:

- $\alpha = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{e}_i$
- $\alpha = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{u}_i$

Suma wskaźników bezwzględnych jest równa zero, a suma wskaźników względnych jest równa liczbie faz cyklu (p).

Obliczamy czyste wskaźniki:

- $s_j^b = \bar{e}_j - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{e}_i$
- $s_j^w = \frac{\bar{u}_j}{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{u}_i}$

- 1 Wyodrębnianie tendencji rozwojowej
 - Funkcje trendu
 - Trend pełzający
 - Średnia ruchoma
- 2 Analiza wahań sezonowych
 - Etap I – Wyodrębnienie tendencji rozwojowej
 - Etap II – Uwolnienie wyrazów szeregu empirycznego od trendu
 - Etap III – Eliminacja wahań przypadkowych
 - Etap IV – Obliczanie czystych wskaźników wahań sezonowych
- 3 Wyznaczanie prognozy
 - Ostateczna postać modelu
 - Błąd prognozy ex post
- 4 Literatura

Wyznaczanie prognozy

Prognostyczną wartość zmiennej na moment/okres t (stanowiący i -tą fazę cyklu) wyznaczamy jako:

- $y_{ti}^* = y_{ti}^{*(w)} + s_i^b$ – model addytywny
- $y_{ti}^* = y_{ti}^{*(w)} * s_i^w$ – model multiplikatywny

$y_{ti}^{*(w)}$ – wstępna prognoza (na okres t dla i -tej fazy cyklu) na podstawie modelu tendencji rozwojowej;

s_i^b , s_i^w – czyste (skorygowane) wskaźniki sezonowości dla i -tej fazy cyklu.

Przy prognozowaniu na podstawie średniej ruchomej model prognostyczny ma postać: $y_t^* = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k}^{t-1} y_i$, gdzie y_i to wartość zmiennej prognozowanej w okresie i , a y_t^* to prognoza na okres t .

Błąd prognozy *ex post*

błąd bezwzględny: $q_t = y_t - y_t^*$;

błąd względny: $\phi_t = \frac{y_t - y_t^*}{y_t}$;

średni kwadratowy błąd prognozy *ex post*:

$$s^* = \left[\frac{1}{T - n} \sum_{t=n+1}^T (y_t - y_t^*)^2 \right]^{0,5} ;$$

T – numer ostatniego okresu, w którym sprawdzana jest prognoza;
średni kwadratowy błąd prognozy *ex post* dla modelu ze średnią
ruchomą:

$$s^* = \left[\frac{1}{n - k} \sum_{t=k+1}^T (y_t - y_t^*)^2 \right]^{0,5} ;$$

k – stała wygładzania, n – liczba wyrazów szeregu czasowego;

- 1 Wyodrębnianie tendencji rozwojowej
 - Funkcje trendu
 - Trend pełzający
 - Średnia ruchoma
- 2 Analiza wahań sezonowych
 - Etap I – Wyodrębnienie tendencji rozwojowej
 - Etap II – Uwolnienie wyrazów szeregu empirycznego od trendu
 - Etap III – Eliminacja wahań przypadkowych
 - Etap IV – Obliczanie czystych wskaźników wahań sezonowych
- 3 Wyznaczanie prognozy
 - Ostateczna postać modelu
 - Błąd prognozy ex post
- 4 Literatura

Literatura



Strahl D., Sobczak E., Markowska M., Bal-Domańska B. *Modelowanie ekonometryczne z Excelem*. Wrocław: AE 2002.



Ekonometria. Metody, przykłady, zadania. Red. J. Dziechciarz. Wrocław: AE 2002.



Welfe A. *Ekonometria*. Warszawa: PWE 2003.

