Metody numeryczne II. Lista nr 3 (16.11.2005)

Zad. 1. Dla każdego zagadnienia różniczkowego podano jego rozwiązanie dokładne $u_d$ zadane w sposób parametryczny

*a)* $u_t + 2u_x = 0$, $u(x,0) = \sin x$, $x \in (0,\pi)$;
$u_d:$ $x = 2\tau + s$, $t = \tau$, $u = \sin s$, $s \in (0,\pi)$, $\tau \in (0,1)$,

*b)* $u_t + 2u_x = \sin(x - 2t)$, $u(x,0) = 0$, $x \in (0,\pi)$;
$u_d:$ $x = 2\tau + s$, $t = \tau$, $u = \tau \sin s$, $s \in (0,\pi)$, $\tau \in (0,1)$,

*c)* $u_t + u_x = x + t$, $u(x,0) = 0$, $x \in (0,\pi)$;
$u_d:$ $x = \tau + s$, $t = \tau$, $u = \tau(\tau + s)$, $s \in (0,\pi)$, $\tau \in (0,1)$,

W oparciu o metodę charakterystyk wyznaczyć rozwiązania przybliżone powyższych zagadnień. W obliczeniach zastosować metodę Rungego-Kutty drugiego rzędu. Na rozwiązanie przybliżone będą składały się ciągi trójek $(x_{ij}, t_{ij}, u_{ij})$, $0 \le i \le n$, $0 \le j \le m$, gdzie $n+1$ jest liczbą węzłów $s_i$ w przedziale $(0,\pi)$, a $m+1$ jest liczbą węzłów $\tau_j$ w przedziale $(0,1)$. Każda trójka traktowana jest jako przybliżenie odpowiednich dokładnych wartości rozwiązania dokładnego, tzn.

$$x_{ij} \approx x(\tau_j, s_i), \quad t_{ij} \approx t(\tau_j, s_i), \quad u_{ij} \approx u(\tau_j, s_i),$$

Wyznaczyć rząd $\alpha$ metody określony jako najmniejszy wykładnik taki, że dla pewnej stałej $C > 0$ niezależnej od kroku podziału $h$ i $k$ odpowiednio przedziału $(0,\pi)$ i $(0,1)$ zachodzi nierówność

$$e(h,k) \le C\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^{\alpha},$$

gdzie $e(h,k) = \max\limits_{ij}\left(|x(\tau_j, s_i) - x_{ij}|, |t(\tau_j, s_i) - t_{ij}|, |u(\tau_j, s_i) - u_{ij}|\right).$

Przy obliczaniu rzędu metody przyjąć, że $k/h = r$, gdzie $r$ jest zadane, np. $r = 2$. Sprawdzić, czy rząd się zmienia, jeśli przyjąć inną wartość $r$.