Metody numeryczne 2, lista 4 dn. 7.12.2005

Zad. 1. Niech

$$(*) \quad \begin{cases} (x+1)u_x + (y+1)u_y = x+y+2 \\ u(x,0) = x, \;\; u(0,y) = y, \;\; x,y \in (0,1) \end{cases}$$

Rozwiązaniem zagadnienia $(*)$ jest funkcja $ud(x,y) = x+y$.

1) Zdyskretyzuj to zagadnienia za pomocą schematu różnicowego jawnego. Niech parametrami przyjętego schematu będą: krok h dyskretyzacji po zmiennej x i $r = k/h$, gdzie k jest krokiem dyskretyzacji po zmiennej y. Wyznacz rozwiązanie przybliżone $\{u_{ij}\}$ dla kilku wybranych wartości par parametrów (r,h), przyjmując np. $r = 4,\ 2,\ 1,\ 1/2,\ 1/4$ i $h = 0.1,\ 0.05,\ 0.02,\ 0.01,\ 0.005,\ 0.001$.

2) Błąd dyskretyzacji można określić następująco

$$er(h,r) = \max_{i,j} |ud(x_i,y_j) - u_{ij}|.$$

Wyznacz wartości błędu dla rozwiązań przybliżonych z punktu 1). Przeanalizuj zachowanie się błędu przy ustalonym r i $h \to 0$.

3) Dla tych wartości parametru r, dla których $er(h,r)$ maleje, gdy h maleje wyznacz rząd aproksymacji.

4) Porównaj zachowanie się błędu metody, gdy $r = 2$ i $1/4$. Wyjaśnij dostrzeżone różnice. Określ wartość graniczną r_g taką, że dla $r < r_g$ zachodzi

$$e(r,h) \to 0,$$

gdy $h \to 0$.

Zad. 2. Niech

$$(*) \quad \begin{cases} (x+1)u_x - (y+1)u_y = x-y \\ u(x,0) = x, \;\; u(1,y) = 1+y, \;\; x,y \in (0,1) \end{cases}$$

Rozwiązaniem zagadnienia $(*)$ jest funkcja $ud(x,y) = x+y$.

1) Zdyskretyzuj to zagadnienia za pomocą schematu różnicowego niejawnego. Niech parametrami przyjętego schematu będą: krok h dyskretyzacji po zmiennej x i $r = k/h$, gdzie k jest krokiem dyskretyzacji po zmiennej y. Wyznacz rozwiązanie przybliżone $\{u_{ij}\}$ dla kilku wybranych par wartości parametrów (r,h), przyjmując np. $r = 4,\ 2,\ 1,\ 1/2,\ 1/4$ i $h = 0.1,\ 0.05,\ 0.02,\ 0.01,\ 0.005,\ 0.001$.

2) Błąd dyskretyzacji można określić następująco

$$er(h,r) = \max_{i,j} |ud(x_i,y_j) - u_{ij}|.$$

Wyznacz wartości błędu dla rozwiązań przybliżonych z punktu 1). Przeanalizuj zachowanie się błędu przy ustalonym r i $h \to 0$.

3) Dla tych wartości parametru r, dla których $er(h,r)$ maleje, gdy h maleje wyznacz rząd aproksymacji.

4) Porównaj zachowanie się błędu metody, gdy $r = 2$ i $1/4$ i h maleje. Czy są jakościowe różnice? Wyjaśnij dlaczego.

Zad. 3. Niech

$$(*) \quad \begin{cases} (x+1)u_x - (y+1)u_y = 2x - y + 1 \\ u(x,0) = 2x, \;\; u(1,y) = 2 + y, \;\; x, y \in (0,1) \end{cases}$$

Rozwiązaniem zagadnienia $(*)$ jest funkcja $ud(x,y) = 2x + y$.

1) Zdyskretyzuj to zagadnienia za pomocą schematu różnicowego Crancka-Nicholsona. Niech parametrami przyjętego schematu będą: krok h dyskretyzacji po zmiennej x i $r = k/h$, gdzie k jest krokiem dyskretyzacji po zmiennej y. Wyznacz rozwiązanie przybliżone $\{u_{ij}\}$ dla kilku wybranych par wartości parametrów (r,h), przyjmując np. $r = 4,\ 2,\ 1,\ 1/2,\ 1/4$ i $h = 0.1,\ 0.05,\ 0.02,\ 0.01,\ 0.005,\ 0.001$.

2) Błąd dyskretyzacji można określić następująco

$$er(h,r) = \max_{i,j} \, |ud(x_i, y_j) - u_{ij}|.$$

Wyznacz wartości błędu dla rozwiązań przybliżonych z punktu 1). Przeanalizuj zachowanie się błędu przy ustalonym r i $h \to 0$.

3) Dla tych wartości parametru r, dla których $er(h,r)$ maleje, gdy h maleje wyznacz rząd aproksymacji.

4) Porównaj zachowanie się błędu metody, gdy $r = 2$ i $1/4$ i h maleje. Czy są jakościowe różnice? Wyjaśnij dlaczego.