Metody numeryczne II. Lista nr 5 (9.1.2006)

Zad. 1.

Dla każdego z następujących zagadnienień podano jego rozwiązanie dokładne:

1. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi}{l}x + 2\sin\frac{2\pi}{l}x + \sin\frac{3\pi}{l}x \end{cases}$$

rozwiązanie dokładne $u_d(x,t) = e^{-\frac{\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi}{l}x + 2e^{-\frac{4\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{2\pi}{l}x + e^{-\frac{9\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{3\pi}{l}x$.

2. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x + 2\sin\frac{3\pi}{2l}x + \sin\frac{5\pi}{2l}x \end{cases}$$

rozwiązanie dokładne $u_d(x,t) = e^{-\frac{\pi^2}{4l^2}t}\sin\frac{\pi}{2l}x + 2e^{-\frac{9\pi^2}{4l^2}t}\sin\frac{3\pi}{2l}x + e^{-\frac{25\pi^2}{4l^2}t}\sin\frac{5\pi}{2l}x$

3. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos\frac{\pi}{2l}x + 2\cos\frac{3\pi}{2l}x + \cos\frac{5\pi}{2l}x \end{cases}$$

rozwiązanie dokładne $u_d(x,t) = e^{-\frac{\pi^2}{4l^2}t}\cos\frac{\pi}{2l}x + 2e^{-\frac{9\pi^2}{4l^2}t}\cos\frac{3\pi}{2l}x + e^{-\frac{25\pi^2}{4l^2}t}\cos\frac{5\pi}{2l}x$

4. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 + \cos\frac{\pi}{l}x + 2\cos\frac{2\pi}{l}x + \cos\frac{3\pi}{l}x \end{cases}$$

rozwiązanie dokładne $u_d(x,t) = 1 + e^{-\frac{\pi^2}{l^2}t}\cos\frac{\pi}{l}x + 2e^{-\frac{4\pi^2}{l^2}t}\cos\frac{2\pi}{l}x + e^{-\frac{9\pi^2}{l^2}t}\cos\frac{3\pi}{l}x$
Za pomocą metody Fouriera znaleźć ich rozwiązania przybliżone

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k T_k(t) X_k(x),$$

gdzie $T_k(t)X_k(x)$ są rozwiązaniami o zmiennych rozdzielonych odpowiedniego zagadnienia pomocniczego. Obliczenia wykonać przyjmując $l = \pi$ i dla kilku wartości n. Całki

$$\int_0^l u(x,0)X_k(x)dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

potrzebne do wyznaczenia współczynników a_k obliczyć stosując jeden ze wzorów przybliżonego całkowania, np. wzór Simpsona (trapezów). Porównać rozwiązanie dokładne z rozwiązaniem przybliżonym na siatce punktów (x_i, t_j), otrzymanej za pomocą równomiernych podziałow odcinków zmiennej x i t

$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = l, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T_{kon}$
Jako błąd przyjąć $e = \max|u_d(x_i,t_j) - u_p(x_i,t_j)|$

Obliczenia wykonać dla kilku wartości m przyjmując $T_{kon} = 1$.

Zad. 2. Zagadnienie

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t \in [0,1]$$
$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1], \quad u(0,t) = 0 = u(1,t), \quad t \in [0,1]$$

ma rozwiązanie dokładne $u_d(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$ (sprawdzić!). Znaleźć metodą niejawną prostych Eulera rozwiązanie przybliżone $u_p(x_i,t_j)$ tego zagadnienia określonego na siatce punktów otrzymanych przez dyskretyzację zmiennej x z krokiem $h = 0.1$ i zmiennej t z krokiem $k = r \cdot h^2$, przyjmując $r = 1$. Znaleźć błąd aproksymacji $e(h,r) = \max|u_p(x_i,t_j) - u_d(x_i,t_j)|$. Sporządzić wykres rozwiązania dokładnego $u_d(x,t)$ i rozwiązania przybliżonego $u_p(x_i,t_j)$. Ćwiczenie powtórzyć dla różnych wartości kroku dyskretyzacji h, np. $h = 0.05,\ 0,025,\ 0.01\ \ldots$ i $r = 1,\ 0.8,\ 0.4,\ 0.2$, zwracając uwagę na wielkość błędu aproksymacji $e(h,r)$. Wyznaczyć rząd metody.

Zad. 3. Zagadnienie

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}(-x^2 + x - 2), \quad x \in (0,1), \quad t \in [0,1]$$
$$u(x,0) = x(x-1), \quad x \in [0,1], \quad u(0,t) = 0 = u(1,t), \quad t \in [0,1]$$

ma rozwiązanie dokładne $u_d(x,t) = e^{-t}x(x-1)$ (sprawdzić!). Znaleźć metodą jawną prostych Eulera rozwiązanie przybliżone $u_p(x_i,t_j)$ tego zagadnienia określonego na siatce punktów otrzymanych przez dyskretyzację zmiennej x z krokiem $h = 0.1$ i zmiennej t z krokiem $k = r \cdot h^2$, przyjmując $r = 0.5$. Znaleźć błąd aproksymacji $e(h,r) = \max|u_p(x_i,t_j) - u_d(x_i,t_j)|$. Sporządzić wykres rozwiązania dokładnego $u_d(x,t)$ i rozwiązania przybliżonego $u_p(x_i,t_j)$. Ćwiczenie powtórzyć dla różnych wartości kroku dyskretyzacji h, np. $h = 0.05,\ 0,025,\ 0.01\ \ldots$ i $r = 1,\ 0.8,\ 0.4,\ 0.2$, zwracając uwagę na wielkość błędu aproksymacji $e(h,r)$. Wyznaczyć rząd metody.

Zad. 4. Zagadnienie

$$u_t = u_{xx} + \pi x\cos(\pi t), \quad x \in (0,1), \quad t \in [0,1]$$
$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1], \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \sin(\pi t), \quad t \in [0,1]$$

ma rozwiązanie dokładne $u_d(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + x\sin(\pi t)$ (sprawdzić!). Znaleźć metodą Crancka-Nicholsona rozwiązanie przybliżone $u_p(x_i,t_j)$ tego zagadnienia określonego na siatce punktów otrzymanych przez dyskretyzację zmiennej x z krokiem $h = 0.1$ i zmiennej t z krokiem $k = r \cdot h^2$, przyjmując $r = 0.5$. Znaleźć błąd aproksymacji $e(h,r) = \max|u_p(x_i,t_j) - u_d(x_i,t_j)|$. Sporządzić wykres rozwiązania dokładnego $u_d(x,t)$ i rozwiązania przybliżonego $u_p(x_i,t_j)$. Ćwiczenie powtórzyć dla różnych wartości kroku dyskretyzacji h, np. $h = 0.05,\ 0,025,\ 0.01\ \ldots$ i $r = 1,\ 0.8,\ 0.4,\ 0.2$, zwracając uwagę na wielkość błędu aproksymacji $e(h,r)$. Wyznaczyć rząd metody.