Modelowanie stochastyczne I*

PPT IM IIIr.†

10.10.2004

1 Generatory liczb losowych

1. Napisać procedury do graficznego testowania zgodności z rozkładem (wykres kwantylowy) (patrz [1], [2]):
   (a) wykładniczym;
   (b) Weibulla;
   (c) normalnym.
2. Napisać graficzny test zgodności w oparciu o wykresy kwantylowe.
3. Posługując się generatorem rozkładu jednostajnego wygenerować próbę n elementową ($n = 100, 1000, 10000$) z rozkładu jednostajnego na odcinku (a, b) (np. $(-1, 1)$).
   (a) Narysować jej histogram oraz dystrybuantę empiryczną. Jak dobieramy liczbę przedziałów szeregu rozdzielczego, aby otrzymać „ładny" wykres?
   (b) Zbadać, czy otrzymana próba ma zakładane własności (ocena średniej, wariancji oraz funkcji korelacji i test χ^2, test graficzny).
   (c) Niech $F_n(x)$ będzie dystrybuantą empiryczną dla otrzymanej próby. Rozwiązać równanie: $F_n(x) = \alpha$ dla zadanych wartości α.
   (d) Powtarzając N razy losowanie, wyznaczyć empiryczny rozkład statystyki $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Narysować histogram $\bar{X}_{n,1}, \ldots, \bar{X}_{n,N}$. Zweryfikować hipotezę o normalności rozkładu $\bar{X}_n$ na podstawie $\bar{X}_{n,1}, \ldots, \bar{X}_{n,N}$.
4. Zaprogramować generator liczb losowych oparty na algorytmie kwadratowym von Neumanna. Zbadać jego jakość obserwując strukturę geometryczną wygenerowanych liczb.

*Przewidywany czas na realizacje zadań z list z 1 i 10 października to 4 tygodnie.

†Krzysztof Szajowski, Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławska, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, E-mail: *szajow@im.pwr.wroc.pl*

5. Zbadać jakość generatora liniowego opratego na formule $X_{n+1} = (aX_n + c)\text{mod } m$ przy różnych parametrach. Dobrać a, c, m takie, że

   - liczby c i m nie mają wspólnych dzielników;
   - $a \equiv 1\text{mod } p$, dla każdego czynnika pierwszego liczby m;
   - $a \equiv 1\text{mod } 4$, jeśli 4 jest dzielnikiem liczby m.

6. Napisać funkcję realizującą liniowy generator i przeprowadzić jego badanie przy różnych parametrach (wykresy: $(U_1, U_2), (U_2, U_3), (U_3, U_4), ...,$ $(U_1, U_2), (U_3, U_4), (U_5, U_6), ...,$ weryfikacja tego, że generowane zmienne losowe mają rozkład jednostajny na $(0, 1)$) (patrz [4], [3]).

7. ** Zaprogramować generator oparty na rejestrach przesuwnych według schematu iteracyjnego $b_i = b_{i-p}$ xor b_{i-q}. Zbadać liczby losowe otrzymane w oparciu o generator losowych bitów (generator Tauswortha).

8. * Napisać procedurę realizującą generator typu Fibonacciego i przeprowadzić jego badanie przy różnych parametrach (wykresy: $(U_1, U_2), (U_2, U_3), (U_3, U_4), ...,$ $(U_1, U_2), (U_3, U_4), (U_5, U_6), ...,$ weryfikacja tego, że generowane zmienne losowe mają rozkład jednostajny na $(0, 1)$, $\bar{U}_i = (U_{1+(i-1)*d}, U_{2+(i-1)*d}, \ldots, U_{d+(i-1)*d})$, $i = 1, 2, \ldots, N$ mają rozkład jednostajny na $[0, 1]^d$). Zbadać zachowanie generowanej próby w zależności od parametrów generatora.

2 Generatory zmiennych losowych o zadanych rozkładach

9. Napisać procedurę generującą zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ z 12 zmiennych losowych niezależnych o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Wygenerować próby jak w zadaniu 3 i przedstawić ją graficznie.

10. Wygenerować próbę z rozkładu wykładniczego z parametrem λ ($\lambda = 2, \frac{1}{2}$) i przedstawić graficznie jak w zadaniu 3.

11. Dla symetrycznego błądzenia losowego narysować trajektorię. Powtarzając generację trajektorii n razy (n jak w zadaniu 3) przedstawić graficznie rozkład unormowanej pozycji końcowej trajektorii, tj. histogram unormowanej $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

12. Wykorzystując procedurę z zadania 9 narysować trajektorie:

    (a) standardowego ruchu Browna;

    (b) geometryczny ruch Browna;

*Zadania z * są nieobowiązkowe. Ich dodatkowe wykonanie może być podstawą podwyższenia oceny **b.dobry** do celującej.

(c) arytmetyczny ruch Browna.

13. Zaproponować procedurę modelującą ruletkę-pole: $0, 1, 2, \ldots, 36$ wypadają z jednakowym prawdopodobieństwem. Na podstawie n prób (n jak w zadaniu 3) oszacować prawdopodobieństwo wygranej kasyna niezależnie od obstawianych pól (czyli wypadnięcie 0).

14. Zaprogramować generator rozkładu zmiennej losowej X o rozkładzie $P(X = k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, M$, gdzie parametrami procedury są $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_M)$, M.

15. Napisać procedurę pozwalającą na symulacyjne wyznaczanie rozkładu statystyki testowej przy prawdziwej hipotezie zerowej na przykładzie testu χ^2.

16. Napisać procedurę pozwalającą na symulacyjne wyznaczenie kwantyla rozkładu χ^2.

17. Zastosować metoda eliminacji do generowania ciągu zmiennych losowych o rozkładzie:

    (a) Beta z zadanymi parametrami p i q;

    (b) Trójkątnego na $[a, b]$, $a < b$ o gęstości symetrycznej względem $x = \frac{a+b}{2}$.

18. * Podać i zaimplementować alternatywne metody generacji zmiennych losowych o rozkładzie Beta:

    (a) w oparciu o rozkłady statystyk pozycyjnych (patrz Lemat 3.11 w [4]);

    (b) z wykorzystaniem relacji rozkładu gamma z rozkładem Beta (patrz Lemat 3.12 w [4]);

    (c) za pomocą algorytmu Jöhnka (patrz Lemat 3.13 w [4]).

Literatura

[1] Jan Beirlant, Jozef L. Teugels, and Petra Vynckier. *Practical Analysis of Extreme Values*. Leuven University Press, Leuven, 1996.

[2] J. Koronacki i J. Mielniczuk. *Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych*. WNT, Warszawa, 2001.

[3] K. Szajowski. *Modelowanie stochastyczne*. Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławska, 2002. http://neyman.im.pwr.wroc.pl/~szajow/modelowanie/.

[4] R. Wieczorkowski I R. Zieliński. *Komputerowe generatory liczb losowych*. WNT, Warszawa, 1997.