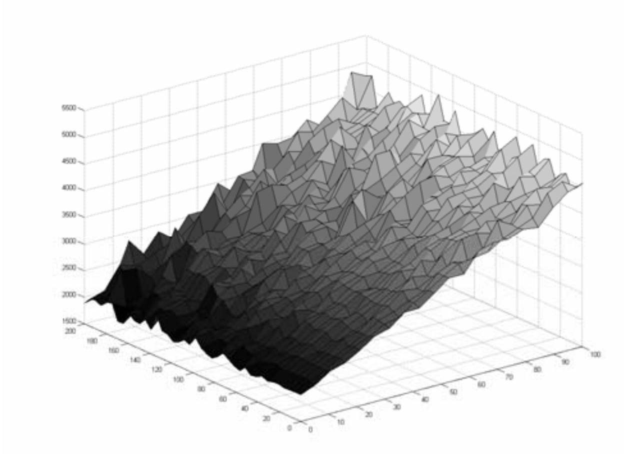
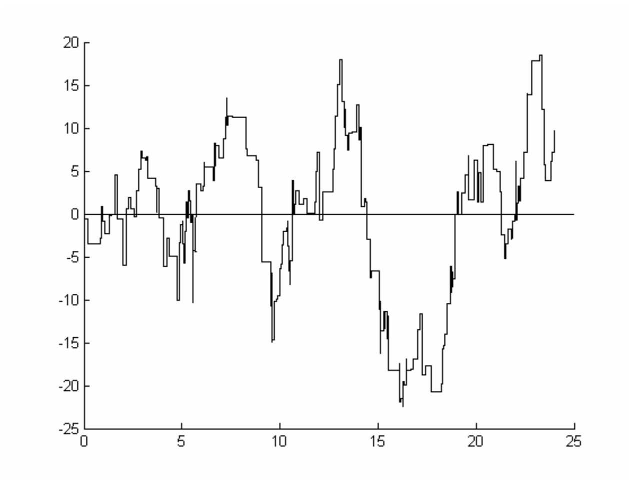
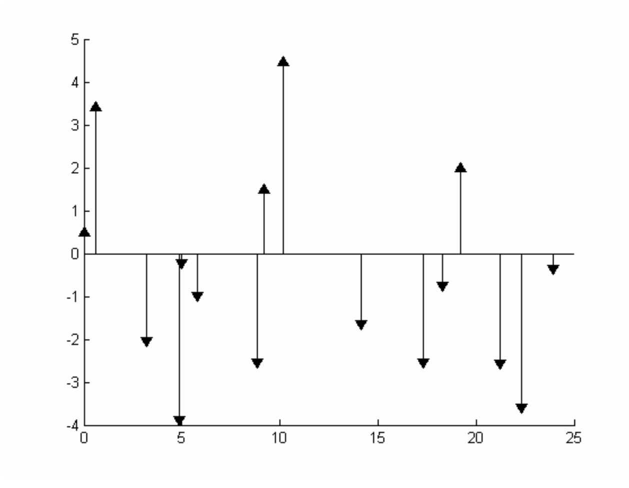
# Modelowanie stochastyczne I

## O pewnych rozkładach zmiennych losowych...






Paweł Cibis
#136008
9 listopada 2005

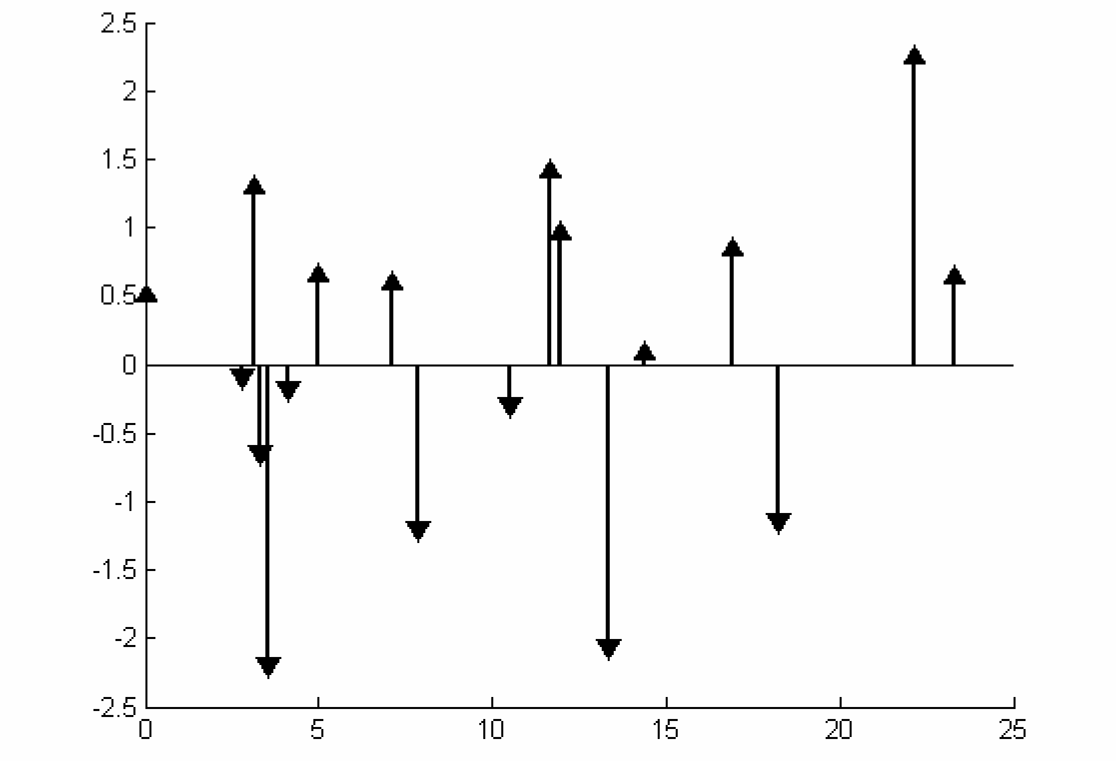
# Zadanie 3

W zadaniu tym konstruuję proste narzędzie zarządzania ryzykiem dla instytucji finansowej. Chcę wiedzieć, ile kapitału powinna ona zgromadzić na początku dnia, aby w ciągu 24h stan konta nie spadł poniżej zera.

Symulację przeprowadzę dla dwóch różnych modeli. W pierwszym odstępy czasu pomiędzy kolejnymi momentami wpłat/wypłat będą określone zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze stałym parametrem $\lambda$, w drugim parametr ten ma rozkład gamma o zadanych parametrach $a > 0$ i $b > 0$. Kwota przepływu w każdym z momentów będą określone za pomocą zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze znanymi parametrami $\mu$ i $\sigma$. Następnie przeanalizuję st an konta na koniec dnia zależnie od różnej wartości parametrów zastosowanych rozkładów.

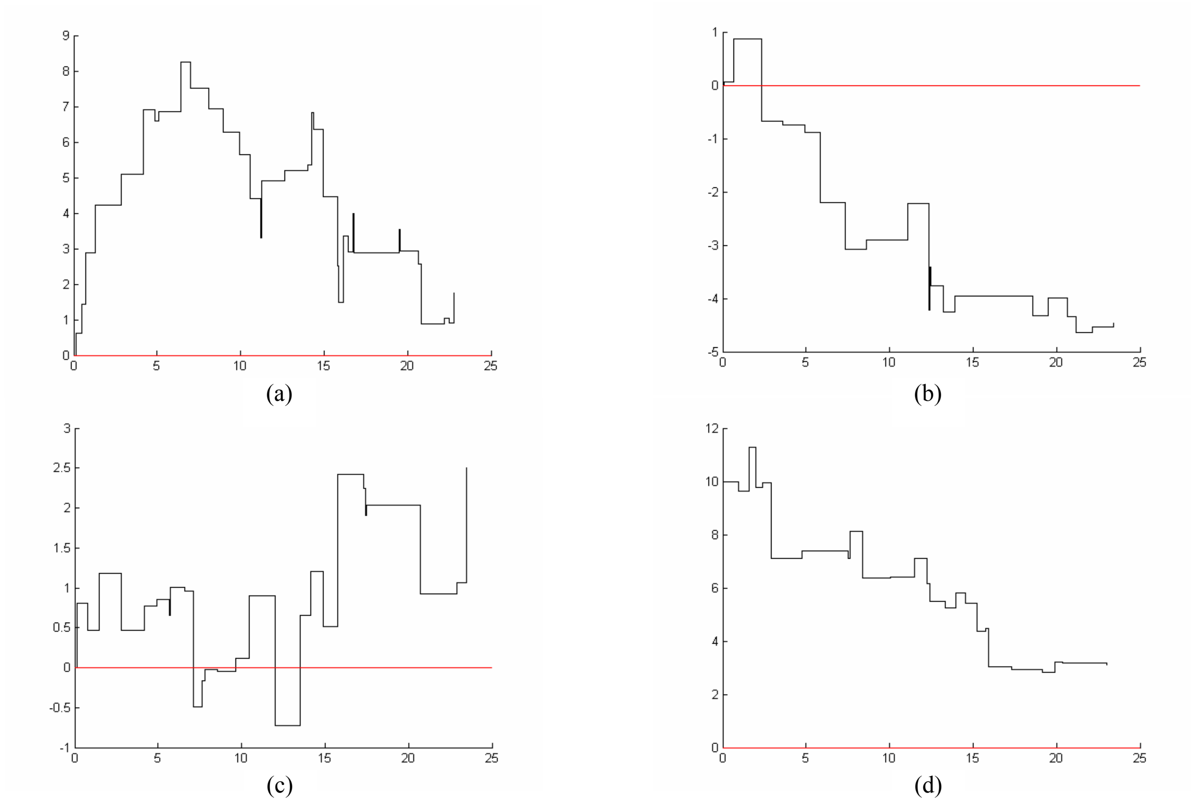
## Sytuacja ogólna:

W modelowanej instytucji finansowej występują wpływy oraz wypływy środków pieniężnych. Jeżeli wpływy oznaczymy strzałkami znajdującymi się powyżej linii bazowej oznaczającej zero (o grotach skierowanych w górę), wypływy strzałkami znajdującymi się poniżej tej linii (o grotach skierowanych w dół), zaś kwota operacji zostanie odzwierciedlona w długości strzałki, to przykładowe przepływy można przedstawić na następującym wykresie:




Rys. 1. Przykładowy rozkład czasowy wpływów i wypływów środków pieniężnych w ciągu 1 doby.

Za pomocą wykresu schodkowego można przedstawić bieżący stan konta instytucji finansowej:

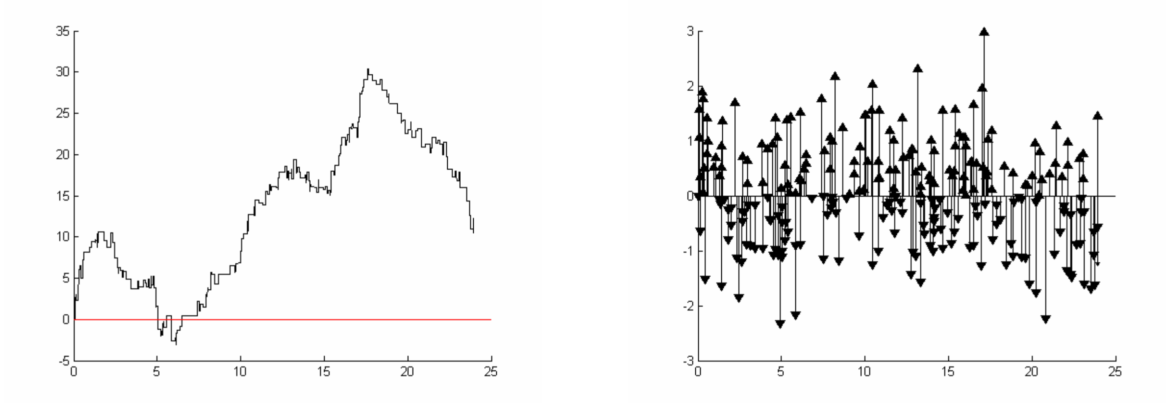



Rys. 2. Przykładowe zmiany stanu konta instytucji finansowej w ciągu doby.

Stan konta w analizowanym okresie czasu może kształtować się bardzo różnie. Wariant, w którym każdy wypływ środków pieniężnych znajdzie pokrycie we wcześniejszych wpływach (rys. 2a) jest tylko jedną z możliwości (w dodatku bardzo optymistyczną). W sytuacjach kryzysowych (np. gwałtownego spadku zaufania do instytucji finansowej) lub okresach wzmożonych zakupów (w przypadku banku) bądź też wystąpienia katastrofy na dużą skalę (ubezpieczyciele) wysokość środków pieniężnych takiej instytucji może gwałtownie się zmniejszyć (rys. 2b). Jeżeli przekroczona zostanie cienka czerwona linia, oznaczająca na wykresach brak środków na koncie, bank lub zakład ubezpieczeń mogą znaleźć się w poważnych kłopotach, bądź nawet zbankrutować. W moim modelu przyjmuję założenie, iż każde przekroczenie linii zero od góry (spadek stanu konta poniżej zera) oznacza bankructwo. Dlatego nawet sytuacja taka, jak na rys. 2c będzie oceniana negatywnie. Rozwiązaniem dla analizowanej instytucji będzie oszacowanie kapitału, który powinna posiadać na początku okresu, by jej środki pieniężne nie uległy wyczerpaniu nawet przy dużej przewadze wypłat (rys. 2d).

# *Model I*

Odstępy pomiędzy momentami wpłat/wypłat są określone zmienną losową $t_i$ o rozkładzie wykładniczym ze stałym parametrem $\lambda$. Jako analizowany okres przyjmuję $T = 24$ (można to interpretować jako 24h) i $\lambda = 0{,}1$, co gwarantuje dużą ilość przepływów w okresie $T$ (rys. 3. oraz rys. 4.). Kwota każdego z przepływów jest określona zmienną losową $X_i$ o rozkładzie normalnym. Jako jego parametry przyjmuję $\mu = 0$ oraz $\sigma = 1$. Wykonuję symulację dla $N = 1000$ dni. Na podstawie uzyskanych wyników obliczam średni stan konta na koniec dnia, przeciętną wysokość najniższego stanu konta w ciągu dnia, odchylenie standardowe stanu konta na koniec dnia, najniższy stan konta spośród wszystkich dni oraz  ilość dni, w których stan konta w ciągu dnia spadł poniżej zera (ilość „bankructw”).



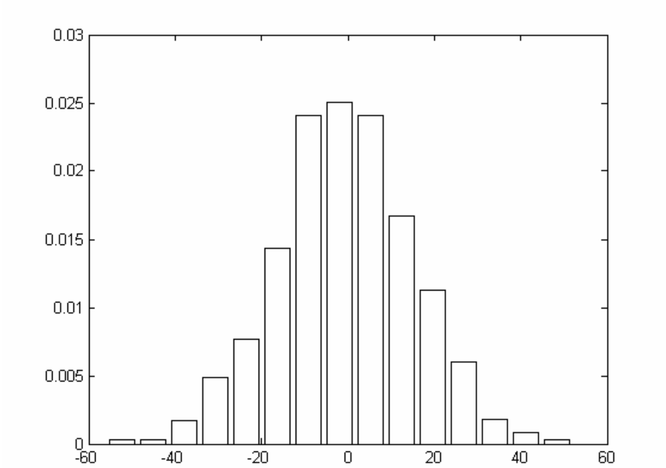
Rys. 3. Kształtowanie się stanu konta oraz rozkład wpłat i wypłat dla jednego dnia w modelu I.

Oto wyniki przeprowadzonej symulacji:

| $N$ | $T$ | $t_i$ | $X_i$ | $K_0$ | $\overline{K}$ | $\overline{K}_{min}$ | $\min(K_{min})$ | $S(K)$ | bankrut |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 24 | E(0,1) | N(0;1) | 0 | –0,6792 | –12,4201 | –59,2390 | 15,6524 | 964 |

Ponieważ w 96,4% przypadków instytucja rozpoczynająca okres bez środków pieniężnych zbankrutowała, powinna bezwzględnie posiadać na starcie pewną kwotę pieniędzy. Problemem jest jej wysokość – oczywiście musi ona gwarantować utrzymanie dodatniego stanu konta przez cały analizowany okres, ale nie powinna być też zbyt wysoka – pieniądze leżące w kasie nie generują odsetek, dlatego każda nadwyżka środków ponad koniecznie zabezpieczenie powinna być inwestowana w papiery wartościowe bądź umieszczana na oprocentowanych lokatach bankowych.

Przy okazji uzyskałem również unormowany histogram rozkładu stanu konta na koniec dnia. Jego wzrokowa analiza pozwala stwierdzić, iż jest to rozkład zbliżony do normalnego. Potwierdza to teoria statystyki – rozkład ten jest rozkładem sumy pewnej liczby zmiennych losowych o rozkładzie normalnym N(0,1). Gdyby każda z wygenerowanych sum miała tyle samo składników, rozkład ten byłby – rozkładem normalnym. Tutaj jest wprawdzie zmienna ilość składników, ale zróżnicowanie to jest na tyle niewielkie, iż otrzymany rozkład jest bardzo zbliżony do normalnego.



Rys. 4. Unormowany histogram rozkładu stanu konta na koniec dnia w modelu I.

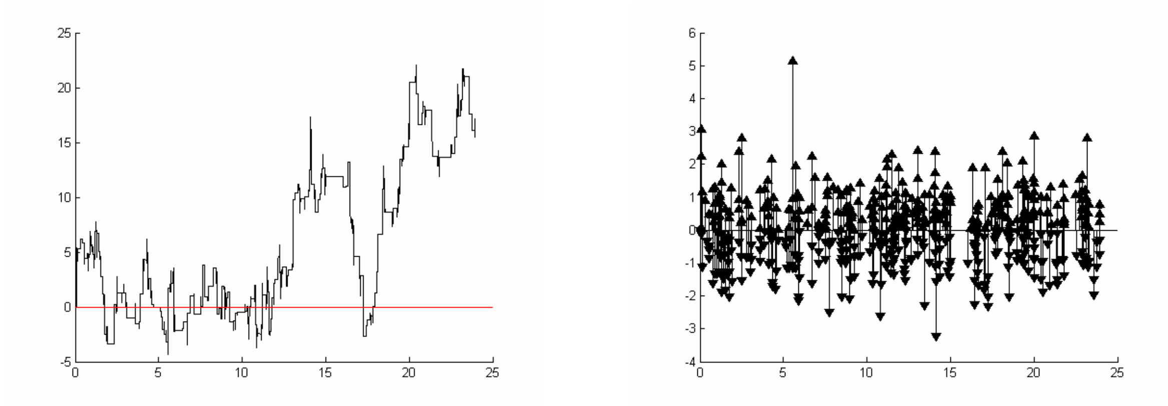
Dzięki otrzymanym wynikom, mogę sprawdzić, jak wyglądałaby sytuacja finansowa instytucji, gdyby początkowa wysokość środków pieniężnych była równa (oczywiście uwzględniając przeciwny znak) przeciętnej wielkości minimalnego stanu konta w ciągu dnia, dolnej granicy 1-, 2- i 3-sigmowego przedziału dla przeciętnej wysokości stanu konta na koniec dnia oraz najniższej wysokości stanu konta w ciągu wszystkich dni. W tym celu wykonuję pięć następnych symulacji:

| $N$ | $T$ | $t_i$ | $X_i$ | $K_0$ | $\overline{K}$ | $\overline{K_{min}}$ | min($K_{min}$) | bankrut |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 24 | E(0,1) | N(0;1) | 12,4201 [$-\overline{K_{min}}$] | 11,8256 | 0,4429 | –48,3881 | 416 |
| | | | | 16,3316 [$-(\overline{K}-S(K))$] | 15,6999 | 4,1542 | –32,4991 | 276 |
| | | | | 31,9840 [$-(\overline{K}-2*S(K))$] | 31,9833 | 20,3574 | –7,0393 | 33 |
| | | | | 47,6363 [$-(\overline{K}-3*S(K))$] | 47,0184 | 35,4555 | –0,8744 | 1 |
| | | | | 59,2390 [–min($K_{min}$)] | 58,6646 | 47,2118 | 10,8851 | 0 |

Można zaobserwować, iż wraz ze wzrostem $K_0$, wzrasta przeciętny kapitał na koniec dnia, średni minimalny stan konta w ciągu dnia oraz najniższy stan konta w ciągu wszystkich dni. Jest to oczywiście zgodne ze zdrowym rozsądkiem, gdyż w każdej kolejnej symulacji instytucja finansowa dysponuje na początku dnia coraz wyższą kwotą pieniężną. Stąd oczywisty jest też spadek ilości „bankructw". Dla $K_0$ równego dolnemu krańcowi przedziału 3-sigmowego przeciętnej wysokości stanu konta na koniec dnia liczba ta wynosi jeden. Nie jest to dużo, ponieważ bo w takim razie obliczone na podstawie symulacji prawdopodobieństwo bankructwa podmiotu wynosi 0,001. Jednakże oznacza to też, że w ciągu niecałych 3 lat nastąpi, przeciętnie rzecz biorąc, jeden dzień, w którym instytucja finansowa upadnie. Biorąc pod uwagę generalnie niewielką długość okresu, jest to wynik nie do przyjęcia dla zdecydowanej większości potencjalnych klientów. Dlatego też akceptowalna będzie dopiero taka wartość $K_0$, dla której liczba „bankructw" w symulacji wynosi zero. Sytuacja taka zachodzi gdy początkowy stan konta będzie równy minimalnemu stanowi konta z testowego przebiegu. Warto jednak zwrócić uwagę na fakt, iż wartość ta znacznie wybiega poza przedział 3-sigmowy. W próbie testowej pojawiła się więc wybitnie odstająca wartość minimalna, która w rozkładzie tak bardzo zbliżonym do normalnego powinna występować niezmiernie rzadko. Dodatkowo najmniejsza wartość stanu środków pieniężnych w symulacji dla tej wielkości $K_{0,}$ jest dość duża. Należałoby się więc zastanowić, czy taki poziom zabezpieczenia nie jest jednak nieco za wysoki. Można by obniżyć nieco zabezpieczenie, a uzyskane z tego tytułu wolne środki zainwestować np. w średnioterminowe lokaty lub w obligacje Skarbu Państwa – część zysków z tego tytułu mogłaby w kryzysowych przypadkach być przeznaczana na zaspokojenie dodatkowego popytu na pieniądz wśród klientów instytucji finansowej.

# Model II

W porównaniu z modelem I następuje tu zmiana założeń dotyczących rozkładu zmiennej losowej opisującej odstępy czasowe pomiędzy kolejnymi momentami wpłat i wypłat. Tym razem parametr $\lambda$ nie jest stały, lecz jest zmienną losową o rozkładzie gamma za parametrami $a > 0$ i $b > 0$. Aby otrzymać dużo przepływów w ciągu analizowanego okresu przyjmuję $a = 0{,}5$ oraz $b = 0{,}1$. Pozostałe parametry modelu pozostają takie same jak w poprzednim modelu.



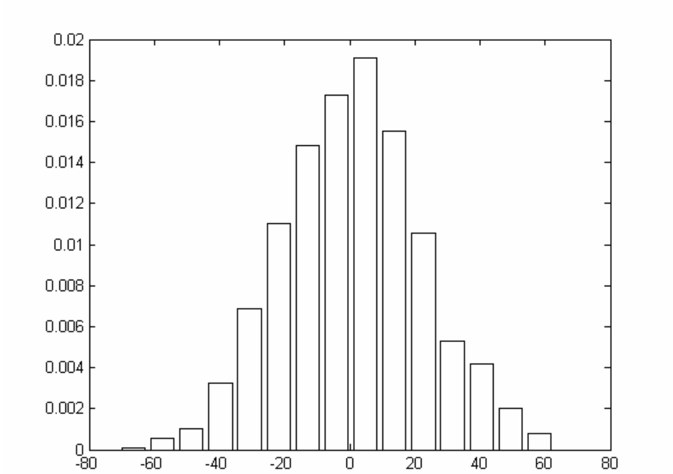

Rys. 5. Kształtowanie się stanu konta oraz rozkład wpłat i wypłat dla jednego dnia w modelu II.

Przeprowadzam symulację testową dla $K_0 = 0$, która będzie punktem wyjścia do dalszych badań. Obliczam te same wielkości, co w modelu I:

| $N$ | $T$ | $t_i$ | $\Lambda$ | $X_i$ | $K_0$ | $\overline{K}$ | $\overline{K_{min}}$ | min($K_{min}$) | S($K$) | bankrut |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 24 | E($\Lambda$) | Γ(0,5;0,1) | N(0;1) | 0 | 0,6533 | –16,5930 | –71,5658 | 21,5853 | 978 |

Otrzymany rozkład wysokości stanu konta na koniec dnia charakteryzuje się większą zmiennością niż w modelu I (wyższe odchylenie standardowe, większe straty). Jest też więcej „bankructw”, bo aż 97,8% prób. Unormowany histogram tego rozkładu ponownie ma postać zbliżoną do krzywej Gaussa, tym razem jest ona jednak nieco mniej wysmukła, co sugeruje większy udział obserwacji znacznie odbiegających od średniej – jest to potwierdzenie spostrzeżenia o większej zmienności w przypadku modelu II. Nie należy jednak powyższych wniosków uogólniać, gdyż zjawisko to może zależeć od doboru parametrów obu modeli. Analiza modeli pod tym kątem nastąpi w dalszej części tego opracowania.

Podobnie jak w modelu I wzorkowa analiza unormowanego histogramu sugeruje rozkład stanu konta na koniec dnia bardzo zbliżony do rozkładu normalnego.




Rys. 6. Unormowany histogram rozkładu stanu konta na koniec dnia w modelu II.

Dzięki wynikom uzyskanym w przebiegu próbnym, wykonuję dalsze symulacje w sposób analogiczny do tych z modelu I:

| N | T | $t_i$ | $\Lambda$ | $X_i$ | $K_0$ | $\overline{K}$ | $\overline{K_{min}}$ | $\min(K_{min})$ | bankrut |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 24 | $E(\Lambda)$ | $\Gamma(0{,}5;0{,}1)$ | $N(0;1)$ | 16,5930 $[-\overline{K_{min}}]$ | 16,5595 | –0,4230 | –53,9466 | 434 |
| | | | | | 20,9320 $[-(\overline{K} - S(K))]$ | 20,4630 | 3,8797 | –61,6543 | 344 |
| | | | | | 42,5173 $[-(\overline{K} - 2 * S(K))]$ | 42,5292 | 25,3863 | –32,6855 | 56 |
| | | | | | 64,1026 $[-(\overline{K} - 3 * S(K))]$ | 64,1229 | 47,4620 | –24,2905 | 3 |
| | | | | | 71,5658 $[-\min(K_{min})]$ | 72,5159 | 55,0486 | –6,4975 | 1 |

Można zauważyć, że dla analogicznych wielkości $K_0$, wyniki w modelu II okazały się gorsze niż w modelu I. Dodatkowo nie wszędzie została zachowana właściwość zmniejszania się wysokości maksymalnej straty wraz ze wzrostem początkowej ilości środków pieniężnych. Jest to właśnie przyczyną większej zmienności modelu II o tak ustalonych parametrach. Z tego samego powodu, mimo iż w analogicznych symulacjach przeciętny minimalny stan konta w ciągu dnia okazał się wyższy w modelu II niż w modelu I, to pod względem ilości „bankructw" lepszy jest model I. Okazało się także, iż w tym przypadku $K_0$ o wysokości równej minimalnemu stanowi konta w całym analizowanym okresie nie spełnia wymogów akceptowalności modelu o tym parametrze początkowym. W tym przypadku dla skutecznego zabezpieczenia, należy poszukać wyższej wartości $K_0$.

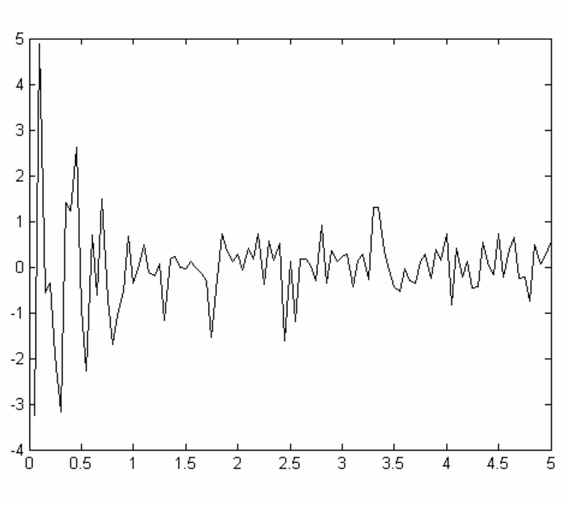
# Analiza stanu konta na koniec dnia ($K$) w funkcji parametrów stosowanych rozkładów

W każdym przypadku wygenerowane wysokości $K$, to tak naprawdę średnia z 30 obserwacji $K$ dla takich samych parametrów modelu. Dzięki temu wartości $K$ są mniej przypadkowe i bardziej uwidacznia się wpływ na tę wartość parametrów rozkładów.

## Model I

### Zależność $K$ od parametru $\lambda$

Parametr $\lambda$ występuje w rozkładzie wykładniczym, który w analizowanym modelu generuje odstępy czasowe pomiędzy kolejnymi przepływami finansowymi. Wartość oczekiwana tego rozkładu wynosi $\lambda$, toteż interesują nas małe wartości tego parametru, aby przepływów było odpowiednio dużo. W teście przyjąłem następujące parametry: $K_0 = 0$, $T = 24$, $\mu = 0$ i $\sigma = 1$.



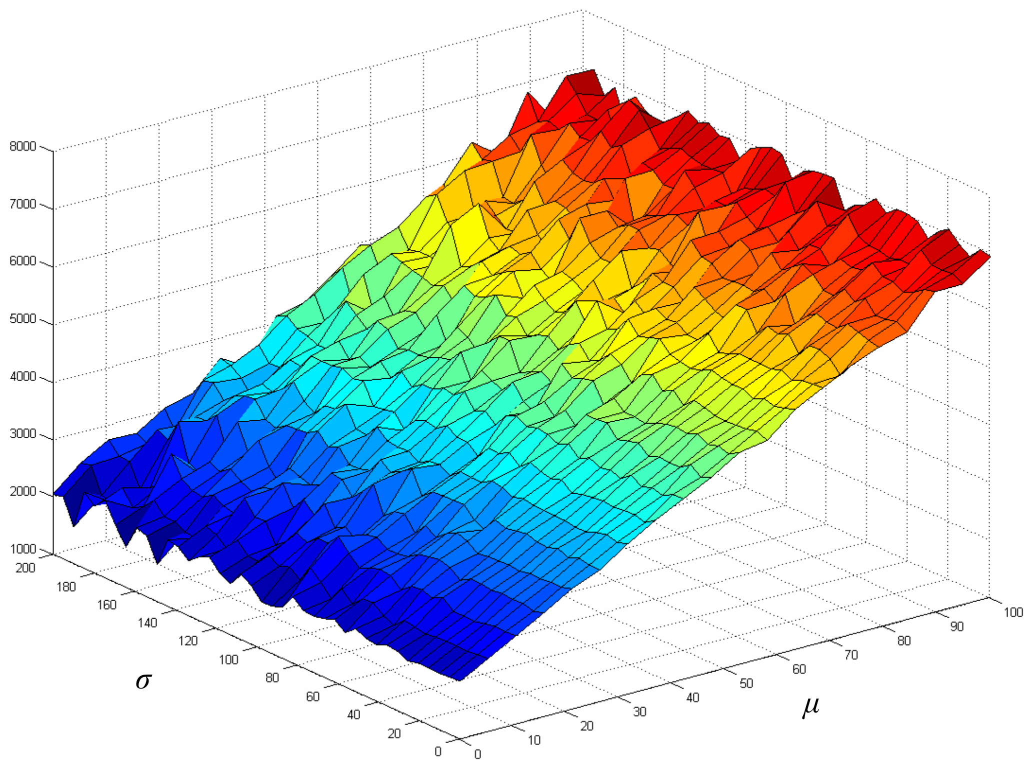

Rys. 7. Zależność wysokości stanu konta na koniec dnia od wielkości parametru $\lambda$ w modelu I.

Wyniki oscylują wokół wysokości $K_0$. Dla niskich wartości parametru $\lambda$ wartości $K$ są bardzo zróżnicowane, dla większych wartości tego parametru stabilizują się. Przyczyną takiego stanu rzeczy jest właśnie wartość $\lambda$. Gdy jest niska, przepływów finansowych jest dużo, dlatego mogą znacznie zmienić wartość kapitału posiadanego na koniec dnia. Dla dużej wartości $\lambda$, przepływy są nieliczne, co przy zerowej wartości oczekiwanej ich wysokości oraz niewielkim odchyleniu standardowym uniemożliwia większe zmiany wysokości kapitału w ciągu dnia.

### Zależność $K$ od parametrów $\mu$ i $\sigma$ rozkładu normalnego

Parametr $\mu$ odpowiada za oczekiwaną wysokość pojedynczego przepływu finansowego, a $\sigma$ za jej odchylenie standardowe. Zmieniając wysokość $\mu$ można modelować np. dni o zwiększonym zapotrzebowaniu na pieniądz wśród klientów banku. Drugi parametr pozwala oddać zróżnicowanie klientów pod względem wysokości wpłacanych/wypłacanych kwot pieniężnych.

W teście przyjąłem następujące parametry: $K_0 = 2000$, $T = 24$, $\lambda = 0,5$. Wartości $\sigma$ zmieniają się na przedziale [0, 200], a wartości $\mu$ na przedziale [0, 100]. Co prawda $\mu$ może być również mniejsze od zera, ale analizowane zagadnienie jest symetryczne i można się ograniczyć wyłącznie do wartości dodatnich – pozwala to w rozsądnym czasie wygenerować wyniki dla większych co do wartości bezwzględnej wartości $\mu$, niż w przypadku symetrycznego względem 0 przedziału o tej samej rozpiętości.




Rys. 8. Zależność wysokości stanu konta na koniec dnia od wielkości parametrów $\mu$ i $\sigma$ w modelu I.

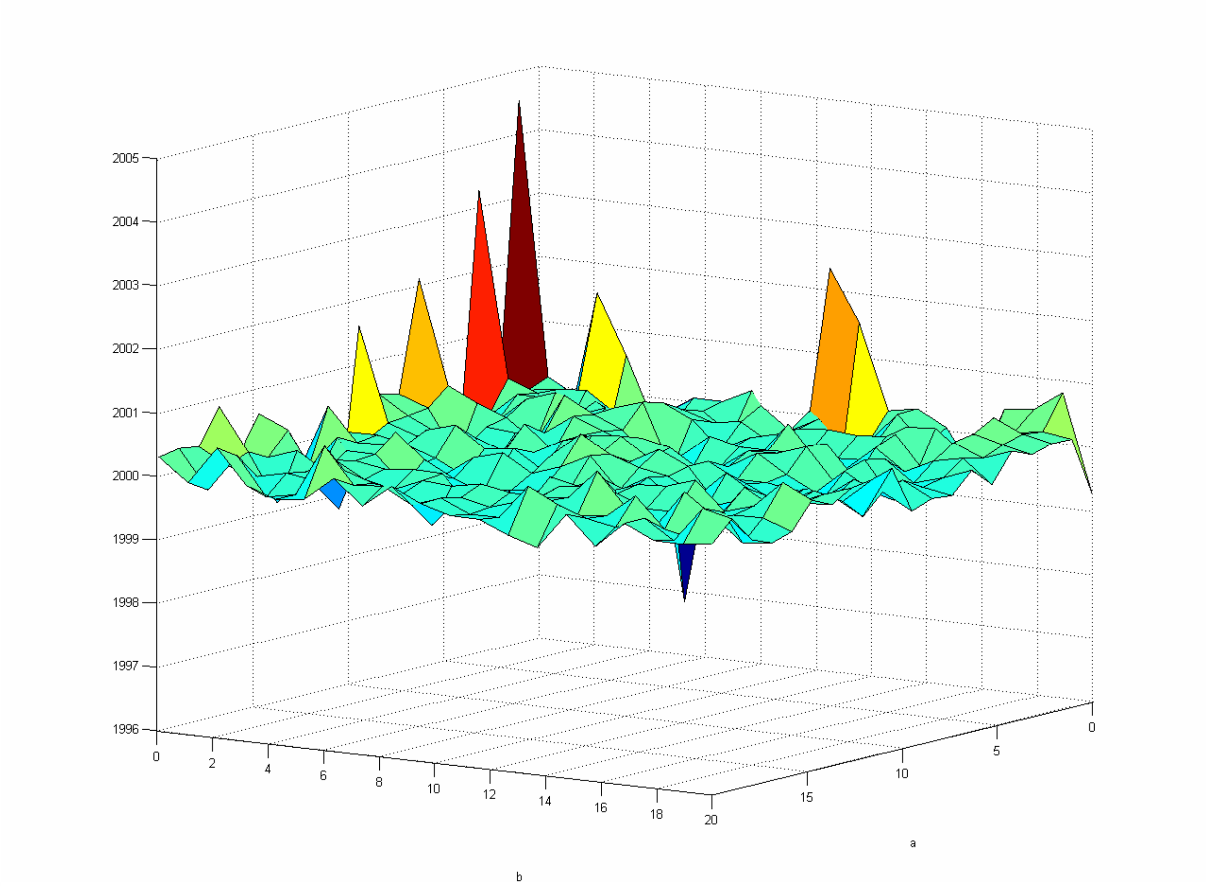
Otrzymane wyniki ukazują, iż wartość $K$ wzrasta wraz z wartością $\mu$ (co akurat nie jest w tym przypadku niczym nadzwyczajnym). Podobnie wraz ze wzrostem $\sigma$ rośnie zmienność $K$. Mniej oczywisty jest jednak wzrost zmienności $K$ pod wpływem wzrostu $\mu$, nawet przy niskim odchyleniu standardowym pojedynczego przepływu. Zjawiska tego by nie było, gdyby liczba przepływów w ciągu dnia była każdego dnia taka sama. Liczba ta jest jednak generowana losowo, toteż $K$ jest sumą czasem mniejszej, a czasem większej liczby zmiennych losowych o rozkładzie normalnym. Im większa jest wartość oczekiwana pojedynczego przepływu, tym bardziej wpływa na wysokość sumy brak lub nadmiar pewnej liczby przepływów w stosunku do wartości $K$ uzyskanej dla przeciętnej liczby wpłat/wypłat.

# Model II

## Zależność $K$ od parametrów $a$ i $b$

Parametr $a$ nazywany jest parametrem kształtu, zaś $b$ – parametrem skali. Wpływają one na wartości zmiennej losowej $\Lambda$ o rozkładzie gamma $\Gamma(a,b)$, która tak jak $\lambda$ w modelu I odpowiada za wielkość odstępów czasowych pomiędzy kolejnymi przepływami finansowymi.

W teście przyjąłem następujące parametry: $K_0 = 2000$, $T = 24$, $\mu = 0$ i $\sigma = 1$. Wartości parametrów a oraz b zmieniają się na przedziale [0,1; 20].

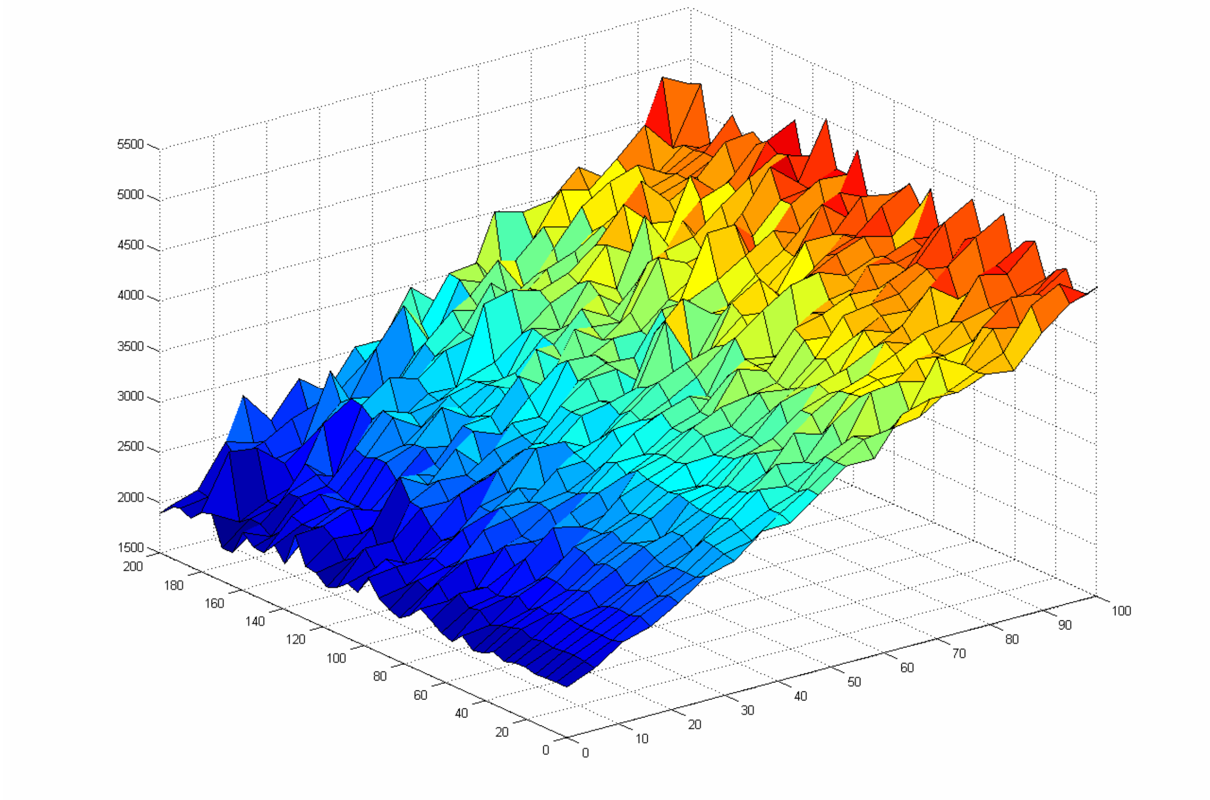



Rys. 9. Zależność wysokości stanu konta na koniec dnia od wielkości parametrów $a$ i $b$ w modelu II.

Dla niskich wartości $a$ i $b$ otrzymane $K$ jest bardzo zróżnicowane – tym bardziej, im bardziej $a$ i $b$ są równocześnie bliskie zeru. Względnie duże zróżnicowanie $K$ występuje także gdy tylko jeden z parametrów rozkładu gamma, jest bliski zeru. W takich właśnie przypadkach zmienna losowa $\Lambda$ ma największe szanse na przyjęcie niskich wartości. Dzięki temu zostanie wygenerowanych dużo momentów wpłat/wypłat i $K$ będzie miała możliwość przyjęcia wartości znacznie różnej od $K_0$.

## Zależność $K$ od parametrów $\mu$ i $\sigma$ rozkładu normalnego

Jest to powtórzenie analogicznego testu wykonanego dla modelu I, przy czym zamiast parametru $\lambda$, pojawiają się tu parametry $a = 1$ oraz $b = 1$. Pozostałe wartości parametrów modelu i przedziały zmienności $\mu$ i $\sigma$ pozostały takie same.




Rys. 10. Zależność wysokości stanu konta na koniec dnia od wielkości parametrów $\mu$ i $\sigma$ w modelu II.

Otrzymany wykres bardzo przypomina ten z modelu I. Zależności pomiędzy parametrami $\mu$ i $\sigma$ a wysokością stanu konta na koniec dnia są takie same jak poprzednio. Widoczna jest nieco wyższa zmienność $K$ przy różnych wartościach $\mu$ oraz stałym $\sigma$. Wynika to z tego, że odpowiedzialny pośrednio za ilość przepływów parametr rozkładu wykładniczego jest tutaj zmienną losową, a nie stałą jak w modelu I.