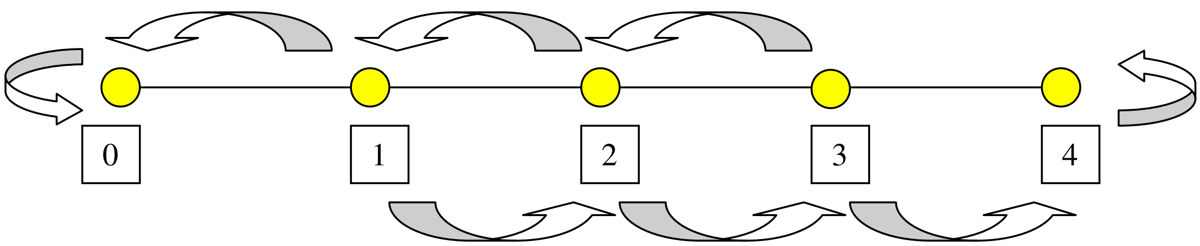
Modelowanie stochastyczne
Lista 3

1. Spacer
Mężczyzna chodzi wzdłuż odcinka ulicy Parkowej, do którego dochodzi pięć przecznic. Między każdymi sąsiednimi przecznicami do ulicy Parkowej przylega budynek (patrz rysunek). Mężczyzna ten znajduje się pod wpływem alkoholu. Skrzyżowania ulic oznaczono numerami 0, ..., 4. Jeśli mężczyzna znajduje się przy rogu numer 1, 2 lub 3, idzie w prawo lub w lewo z prawdopodobieństwem ½. Spacer kończy się w momencie dojścia do rogu 0, przy którym znajduje się jego dom albo do rogu 4, gdzie znajduje się bar. Opisane zjawisko można opisać procesem Markowa. Stany 1, 2 i 3 są stanami chwilowymi: z każdego z nich możliwe jest osiągnięcie stanu pochłaniającego 0 lub 4. Zatem łańcuch Markowa z zadania jest łańcuchem pochłaniającym. Gdy proces osiągnie stan absorbujący, mówimy, że jest pochłonięty. W sposób naturalny pojawiają się pytania: Jakie jest prawdopodobieństwo, że proces osiągnie kiedykolwiek dany stan pochłaniający? Ile razy (średnio) proces przebywa w każdym stanie chwilowym, zanim zostanie pochłonięty? Jaki czas (średnio) upływa do momentu pochłonięcia procesu startującego z danego stanu chwilowego? Oczywiście, w ogólności, odpowiedzi na te pytania zależą od stanu początkowego procesu i od macierzy przejścia.
Napisać macierz przejścia procesu, wykonać obliczenia korzystając z odpowiednich twierdzeń oraz symulacyjnie.



2. Kraina Oz
W pewnej krainie pogoda jest bardzo zmienna. Niestety, nigdy nie występują tam dwa pogodne dni pod rząd. Jeśli jest pogodny dzień, następnego dnia z równym prawdopodobieństwem może padać deszcz, jak i śnieg. Jeżeli pewnego dnia pada śnieg, następnego będzie padał deszcz lub będzie ładna pogoda z prawdopodobieństwami ¼, natomiast ponownych opadów śniegu możemy spodziewać się z prawdopodobieństwem ½.
Przyjmując oznaczenia D – deszcz, Ł – ładna pogoda oraz Ś – śnieg zjawisko możemy opisać poniższą macierzą przejścia.

	D	**Ł**	**Ś**
D	1	0	0
Ł	½	0	½
Ś	¼	¼	½

Znaleźć macierz fundamentalną *N*, *Nc* i *NR*. Zinterpretować rezultaty. Uzyskać wybrane rezultaty metodami symulacyjnymi. Porównać z wynikami analitycznymi. Jak wygląda macierz P^n? Czy ciąg P^n jest zbieżny (sprawdzić regularność łańcucha)? Jeżeli tak, jaka jest interpretacja tego faktu?

3. Zawody

Załóżmy, że zawody można podzielić na następujące grupy: pracownik fizyczny niewykwalifikowany (p.f.n.), pracownik fizyczny wykwalifikowany (p.f.w.) oraz pracownik umysłowy (p.u.). Wiemy, że synowie p.u. w 80% są p.u., w 10% p.f.n. i w 10% p.f.w. Synowie p.f.w. są w 60% p.f.w., w 20% p.u. i w 20% p.f.n. Wreszcie, synowie p.f.n. stają się w 50% p.f.n., natomiast pozostali, z równym prawdopodobieństwem pracują w zawodach z dwóch pozostałych grup. Załóżmy dodatkowo, że każdy ma przynajmniej jednego syna. Sformułować łańcuch Markowa oraz macierz przejścia opisujący zawód kolejnych potomków. Znaleźć prawdopodobieństwo (analitycznie), że wnuk p.f.n. będzie p.u. Policzyć technikami symulacyjnymi inne prawdopodobieństwa.

4. Szkoła medyczna

Student pewnej czteroletniej uczelni medycznej każdego roku wylatuje z tej uczelni z prawdopodobieństwem q, z prawdopodobieństwem r powtarza rok i z prawdopodobieństwem p przechodzi na rok wyższy (oczywiste jest, że $p + q + r = 1$).

a) Sformułować macierz przejścia dla problemu biorąc zbiór stanów W, 1, 2, 3, 4, D, gdzie W oznacza przymusowe opuszczenie murów uczelni, D – uzyskanie dyplomu, a pozostałe stany są kolejnymi latami studiów.
b) Dla przypadku $q = 0{,}1$, $r = 0{,}2$, $p = 0{,}7$ znaleźć czas, jaki student właśnie rozpoczynający studia spędzi na drugim roku. Jak długo student będzie studiował?
c) Znaleźć prawdopodobieństwo uzyskania dyplomu przez studenta rozpoczynającego właśnie naukę.

Rozwiązać wskazane zagadnienia technikami symulacyjnymi.

5. Skarpety

Pewien naukowiec ma cztery pary skarpetek. Postępuje on według następującego schematu. Zakłada pewną parę skarpetek. Następnego dnia nie zakłada już tej samej pary. Wybiera losowo jedną z pozostałych (zakładamy, że prawdopodobieństwo wyboru każdej z nich jest równe). Wiemy, że naukowiec ten nie zakłada nigdy tej samej pary skarpetek dwa dni pod rząd. Wiemy również, że każdego dnia użyte skarpety są prane i tym samym gotowe do noszenia dnia następnego.

Napisać macierz przejścia P, następnie zmodyfikować ją wprowadzając np. stan pochłaniający albo pewne preferencje naszego bohatera co do wyboru skarpet (prawdopodobieństwa nie będą wtedy równe). Policzyć technikami symulacyjnymi coś ciekawego. Sprawdzić, w jakich przypadkach istnieje macierz P^{∞}.

***6. Zadanie o komputerach z listy standardowej.**

***7. Zadanie o zbiorniku z listy standardowej**

8. Prezydent / głuchy telefon

Prezydent RP powiedział pewnej osobie, czy zamierza kandydować w następnej kadencji, czy nie. Osoba ta przekazuje informację osobie następnej, jednak może podać jej „inną wersję prawdy". Osoba właśnie poinformowana mówi osobie następnej itp. Odpowiedź „tak" zostaje przekazana bez zniekształceń z pr. 1 - a dla pewnego a. Z pr. a zamiast „tak" osoba następna usłyszy „nie". Odpowiedź „nie" – z pr. 1 - b będzie przekazana poprawnie.

Określmy stany łańcucha Markowa jako tak/nie. Stan początkowy to deklaracja prezydenta.

Przyjmijmy $a = 0$ i $b = ½$. Napisać macierz przejścia P, wyznaczyć P^2 i P^3. Co stanie się z P^n, gdy n będzie dążyć do nieskończoności? Zinterpretować podany rezultat.
Zbadać zachowanie łańcucha dla różnych a i b.

9. Spacer – modyfikacja
W przykładzie z zadania 1 zmienić prawdopodobieństwa przejścia w sposób następujący: mężczyzna idzie w prawo z pr. 2/3, w lewo z pr. 1/3. Znaleźć macierz fundamentalną N, Nc i NR. Policzyć technikami symulacyjnymi wybrane elementy tych macierzy.

10. Więzień
Aresztant Iksiński ma 3 dolary. Może wyjść za kaucją w wysokości 8 dolarów. Strażnik zgodził się zagrać z nim w pewną grę hazardową. Jeżeli osadzony Iksiński postawi A dolarów, wygrywa A dolarów z pr. 0,4 i przegrywa A z pr. 0,6. Znaleźć prawdopodobieństwo, że Iksiński wygra 8 dolarów i wyjdzie za kaucją zanim straci wszystkie pieniądze w następujących przypadkach (używając różnych strategii):
a) za każdym razem stawia dolara
b) za każdym razem stawia tak dużo, jak to możliwe, ale tak, by nie przekroczyć 8 dolarów
Która strategia daje większą szansę? Odpowiedzieć na to pytanie stosując model Markowa i technikę symulacyjną.

11. Problem ruiny gracza
Gracz bierze udział w grze hazardowej. Za każdym razem wygrywa dolara z pr. p lub przegrywa go z pr. $q = 1 - p$. Problem *ruiny gracza* polega na znalezieniu prawdopodobieństwa w_x wygrania kwoty T zanim straci wszystko, startując z kwotą x. Pokazać, że ten problem może być modelowany pochłaniającym łańcuchem Markowa ze zbiorem stanów 0, 1, 2, …, T ze stanami pochłaniającymi 0 i T. Załóżmy, że prawdopodobieństwo wygranej w każdej z gier wynosi $p = 0{,}48$. Załóżmy dodatkowo, że gracz zaczyna z $x = 50$ dolarami i chce uzyskać $T = 100$ dolarów. Wykonać symulację takiej gry wielokrotnie i policzyć, jak często nasz gracz przegrał wszystkie pieniądze. W ten sposób uzyskamy estymator w_{50}. Poeksperymentować z różnymi p.

***12. Miasto**
Miasto podzielono na trzy obszary oznaczone umownie 1, 2 i 3. Oszacowano, że każdy z obszarów emituje każdego dnia u_1, u_2 i u_3 ilości zanieczyszczenia, odpowiednio. Część q_{ij} zanieczyszczenia pochodzącego z regionu i trafia następnego dnia do regionu j. Frakcja q_i = suma(q_{ij}, j = 1, 2, 3) > 0 ucieka do atmosfery. Oznaczmy przez $w_i^{(n)}$ ilość zanieczyszczeń w regionie i po n dniach. Oczywiście $w^{(n)}$ jest wektorem składającym się z elementów $w_i^{(n)}$.
a) Pokazać, że $w^{(n)} = u + uQ + \ldots + uQ^{n-1}$.
b) Pokazać, że $w^{(n)}$ ma granicę w przy n dążącym do nieskończoności. Ile wynosi ta granica? Pokazać, jak obliczyć w mając u.
c) Władze chcą ograniczyć poziom zanieczyszczeń podając w. Pokazać, jak można wyznaczyć u mając dane w.
Wskazówka: zastosować łańcuch Markowa z jednym stanem pochłaniającym. Wykonać symulacje komputerowe.

***13. Model Ehrenfesta dyfuzji gazu**
Mamy dwa naczynia połączone niewielkim otworem. Cząsteczki gazu przemieszczają się z jednego naczynia do drugiego. Matematycznym modelem tego zjawiska mogą być dwie urny. Najpierw prosty przykład: w każdej z nich są dwie kule. Kule modelują cząsteczki gazu. W

każdym kroku wybrana losowo kula przenoszona jest do drugiej urny. Opiszemy ten proces łańcuchem Markowa. Stany procesu to liczba kul w pierwszej urnie.
Macierz przejścia dla tego procesu wygląda następująco:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	0	0	0
1	1/4	0	3/4	0	0
2	0	1/2	0	1/2	0
3	0	0	3/4	0	1/4
4	0	0	0	1	0

Standardowo proces rozpoczyna się w sytuacji, gdy gaz znajduje się w drugim naczyniu. Oznacza to start ze stanu 0 (czyli brak kul w pierwszej urnie). Po parzystej liczbie kroków proces będzie w stanie 0, 2 lub 4. Po nieparzystej – w 1 lub 3. Zauważ, że analizowany łańcuch Markowa jest ergodyczny, ale nie jest regularny.

Rozważmy teraz model Ehrenfesta dla $2n$ kul (cząsteczek). W każdej sekundzie losowo wybrana jedna z $2n$ kul przenoszona jest do drugiej urny. Jeżeli w pierwszej urnie mamy i kul, to z prawdopodobieństwem $1/2n$ bierzemy jedną z nich i przenosimy do drugiej. Z prawdopodobieństwem $(2n - i)/2n$ przenosimy kulę z urny drugiej do pierwszej. W każdej sekundzie liczba kul i w pierwszej urnie opisuje stan naszego systemu. Ponownie wykorzystamy proces Markowa. Ze stanu i można przejść tylko do stanu $i - 1$ albo $i + 1$. Prawdopodobieństwa przejścia dane są wzorami:

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i}{2n}, \; j = i-1 \\ 1-\dfrac{i}{2n}, \; j = i+1 \\ 0, \; else \end{cases}$$

Jesteśmy zainteresowani długoterminową prognozą stanu procesu. Wiadomo, że rozkład stacjonarny w można skonstruować z pomocą rozkładu dwumianowego z parametrami $2n$ i 1/2. Oznacza to losowe rozmieszczenie kul w urnach. Zatem $w_i = \dfrac{\binom{2n}{i}}{2^{2n}}$.

Napisać program symulujący proces. Przedstawić graficznie jego trajektorie. Co będzie, gdy wystartujemy ze stanu 0? Co stanie się, gdy wystartujemy z równą liczbą kul w każdej urnie? Jak proces wygląda dla różnych n (małych, dużych)? Niech jedna urna będzie "uprzywilejowana": kule z niej będą przechodzić do drugiej z większym prawdopodobieństwem. Jak wtedy zachowuje się nasz proces?
Jak wyglądają potęgi macierzy przejścia dla rosnącego wykładnika? Czy jest zbieżność (wskazówka: regularność łańcucha)? Jaka jest interpretacja zbieżności lub jej braku?

***14. Model ekonomiczny Leontiewa**
Mamy n przedsiębiorstw oznaczonych liczbami 1, 2, …, n. i-te przedsiębiorstwo potrzebuje liczbę $0 <= q_{ij} <= 1$ produktów przedsiębiorstwa j (wartość produktów w PLN), aby wyprodukować produkty wartości 1 PLN. Wymagania rynku (wymagania zewnętrzne) co do produkcji przedsiębiorstw opisuje wektor $d = (d_1, d_2, …, d_n)$. Niech $\boldsymbol{Q}$ będzie macierzą składającą się z elementów q_{ij}.

a) Pokazać, że jeżeli przedsiębiorstwa wytwarzają produkty o wartościach $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to do spełnienia wewnętrznych wymagań przedsiębiorstw (czyli takich, które są konieczne do produkcji) wystarcza wektor $x\boldsymbol{Q}$.
b) Pokazać, że wymagania zewnętrzne d i wymagania wewnętrzne zostaną spełnione, gdy przedsiębiorstwa wyprodukują łącznie produkty o wartościach $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, taki że $x = x\boldsymbol{Q} + d$.
c) Pokazać, że jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest macierzą przejścia pochłaniającego łańcucha Markowa, to jest możliwe spełnienie dowolnych wymagań zewnętrznych.
d) Załóżmy, że sumy elementów w wierszach macierzy $\boldsymbol{Q}$ są mniejsze lub równe 1. Podać interpretację ekonomiczną tego założenia. Utworzyć łańcuch Markowa, w którym stany reprezentują przedsiębiorstwa, prawdopodobieństwa przejścia są równe q_{ij}. Dodać pochłaniający stan 0, aby uzyskać "prawdziwy" łańcuch Markowa. Zdefiniujmy prawdopodobieństwo przejścia do tego stanu jako $q_{i0} = 1 - \sum_j q_{ij}$. Pokazać, że ten łańcuch będzie pochłaniający, jeżeli każda firma albo przynosi dochód, albo zależy od firmy przynoszącej dochód.

Należy postawić pytania i odpowiedzieć na nie stosując techniki symulacyjne. W punktach a), b) i c) policzyć analitycznie.

15. Bar samoobsługowy

Analizujemy system kolejkowy z czasem dyskretnym o pojemności n. Jedna osoba jest obsługiwana, pozostałe czekają. Obserwujemy długość kolejki x. Jeżeli $0 < x < n$, to z prawdopodobieństwem p kolejka zwiększa się o jedną osobę. Oprócz tego, niezależnie, z prawdopodobieństwem r zmniejsza się o jedną obsłużoną osobę. Jeżeli $x = 0$ to możliwe jest tylko przybycie osoby (z prawdopodobieństwem p). Gdy $x = n$, nowa osoba odchodzi, nie czekając w kolejce. Zatem możliwe jest tylko zmniejszenie się kolejki (z prawdopodobieństwem r). Sformułować problem z wykorzystaniem łańcucha Markowa (stany zdefiniowane przez liczbę osób w kolejce).
Niech n, p i r będą parametrami programu. Wielkość $s = p / r$ nazywamy *intensywnością ruchu*.

Policzyć analitycznie rozkład stacjonarny dla $s < 1$, $s = 1$ i $s > 1$. Na czym polegają różnice między wektorami w tych trzech sytuacjach?
Napisać program symulujący wyżej opisaną kolejkę. Policzyć, jaką część czasu kolejka ma długość $j = 0, 1, \ldots, n$ oraz średnią długość kolejki. Pokazać, że zachowanie kolejki zależy od tego, czy $s < 1$, $s = 1$ czy $s > 1$.

Niech S będzie całkowitym czasem obsługi klienta (wraz z oczekiwaniem). Niech T będzie czasem między przybyciem kolejnych klientów. Pokazać, wykorzystując techniki symulacyjne, że $E(S) = 1/r$ i $E(T) = 1/p$.

16. Rzut kostką i podzielność przez 7

Rzucamy kostką do gry. Niech S_n będzie sumą oczek wyrzuconych w n rzutach, począwszy od pierwszego. Pokazać, że istnieje wartość graniczna dla proporcji pierwszych n wartości S_n, które są podzielne przez 7. Policzyć wartość tej granicy. Wskazówka: zastosować odpowiedni łańcuch Markowa z siedmioma stanami. Przeanalizować podobne zagadnienia, na przykład podzielność przez 3. Czy w tamtych zagadnieniach uzyska się podobne wyniki?

17. Trzy karty

Wbrew pozorom, jest to gra niekoniecznie hazardowa ☺. Jest dwóch graczy. Mamy trzy karty oznaczone 1, 2 i 3. Mamy urządzenie, które losuje nam liczby 1, 2 lub 3 z równym prawdopodobieństwem. Jedna osoba rozdaje karty. Jedną bierze sobie, dwie daje przeciwnikowi. Ruch w grze polega na wylosowaniu liczby. Osoba, która ma kartę o wylosowanym numerze oddaje ją przeciwnikowi. Gra kończy się, gdy jeden z graczy będzie miał wszystkie karty. Opisać grę pochłaniającym łańcuchem Markowa. Wskazówka: stany to liczba kart posiadanych przez ustalonego gracza. Znaleźć macierz fundamentalną. Jak długo średnio będzie trwać gra? Jakie jest prawdopodobieństwo zwycięstwa rozdającego? Jakie drugiego przeciwnika? Zaproponuj warianty tej gry.

18. Kostki do gry

a) Jak wiele kostek należy rzucić, aby mieć przynajmniej 95% szansę wyrzucenia 6 oczek?
b) Co jest najbardziej prawdopodobne: 1 szóstka przy rzucie 6 kości, 2 przy 12 czy 3 przy 16?
c) Rzucamy *n* kostkami. Zabieramy wszystkie, na których wypadła 1, rzucamy ponownie pozostałe. Kontynuujemy proces tak długo, aż wszystkie kości zostaną wyeliminowane. Jak wiele rzutów do tego potrzeba (średnio)? Zaprezentować rezultaty jako funkcję *n*. Jaka to funkcja? Znaleźć ograniczenie górne i dolne. Wskazówka: wykorzystać łańcuch Markowa ze stanami będącymi aktualną liczbą kości.
d) Spróbować przeanalizować warianty gry jak z punktu c).

19. Eksperymenty

Załóżmy, że pewien eksperyment ma m możliwych, równie prawdopodobnych, wyników. Powtarzamy ten eksperyment wielokrotnie. Pokazać, że oczekiwana liczba eksperymentów, które trzeba wykonać, aby uzyskać k kolejnych powtórzeń takich samych wyników wynosi $(m^k - 1)/(m-1)$. Przykładem takiego eksperymentu jest np. wielokrotny rzut monetą.
Wskazówki: Zbudować pochłaniający łańcuch Markowa z przestrzenią stanów 1, 2, …, k (k jest stanem pochłaniającym), gdzie przebywanie w stanie i oznacza, że ostatni łańcuch takich samych wyników ma długość i. Średni czas do uzyskania k kolejnych takich samych wyników jest o 1 większy niż oczekiwany czas do pochłonięcia procesu startującego ze stanu 1.
Uzasadniono, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby pi, począwszy od cyfry o numerze 24.658.601 następuje ciąg dziewięciu siódemek. Jaki jest oczekiwany czas do wystąpienia takiego samego podciągu w losowym ciągu cyfr? Rozwiązać problem analitycznie (najlepiej w funkcji m i k) oraz sprawdzić analitycznie i symulacyjnie dla zagadnień rzutu monetą i kostką.

20. Szczur

Szczur porusza się w labiryncie składającym się z dziewięciu pomieszczeń (jak pola do gry w kółko i krzyżyk). W środkowym pomieszczeniu znajduje się ser. Z każdego pola szczur może przejść do każdego z pól sąsiednich (przyległego do niego bokiem) z równym prawdopodobieństwem. Sformułować łańcuch Markowa opisujący zachowanie szczura (wskazówka: zdefiniować dziewięć stanów, w tym jeden stan pochłaniający), napisać jego macierz przejścia. Znaleźć średni czas (analitycznie, korzystając z odpowiednich twierdzeń i symulacyjnie), który potrzebny jest szczurowi do znalezienia sera, przy założeniu, że rozpoczyna on poszukiwania w różnych pomieszczeniach. Przeanalizować macierz fundamentalną *N*. Czy można znaleźć w niej coś interesującego (wskazówka: spójrz na przekątną)?

21. Pchła *(modyfikacja zadania z listy)*
Zadanie o pchle można rozwiązać w dwóch wersjach:

a) pchła może pozostać w danych stanie lub przejść do innego z równymi prawdopodobieństwami (1/4)
b) pchła nie może pozostać w tym samym stanie – odpowiada to prawdopodobieństwom równym 1/3

Spróbować przeanalizować obie wersje, symulacyjnie i analitycznie.
Jaki jest oczekiwany czas życia pchły (w zależności od wyboru stanu początkowego)?

22. Daltonizm *(modyfikacja zadania z listy; zadanie z listy będzie objaśnione na zajęciach)*
Analizujemy dziedziczenie daltonizmu (z kojarzeniem krewniaczym, jak na liście zadań). Są dwa geny: g i G, pierwszy z nich powoduje daltonizm, drugi zapewnia normalne rozróżnianie kolorów. Gen G jest dominujący. Mężczyzna ma tylko jeden gen. Jeżeli jest to g, jest daltonistą. Mężczyzna dziedziczy jeden gen z dwóch genów matki, kobieta – jeden gen od każdego z rodziców (stosujemy tutaj prawo Mendla). Zatem mężczyzna może być typu G albo g, kobieta natomiast GG, Gg albo gg.
Zdefiniować przestrzeń stanów (wskazówka: jest ich sześć). Wyliczyć prawdopodobieństwa przejścia. Zauważyć, że łańcuch Markowa z zadania jest łańcuchem pochłaniającym. Wyliczyć średni czas do pochłonięcia, analitycznie (macierze *N*, *NR* i *Nc*) i symulacyjnie. Zinterpretować rezultaty. Jak zachowują się kolejne potęgi macierzy przejścia? Czy jest tak zbieżność?

UWAGA:
Metodyka rozwiązywania wszystkich zadań z łańcuchów Markowa jest podobna. Najpierw należy zdefiniować przestrzeń stanów oraz postać macierzy przejścia.
W każdym przypadku należy się zastanowić, czy łańcuch jest pochłaniający, regularny, czy jest ergodyczny itp. Co wynika z własności łańcucha?
Jeżeli łańcuch jest pochłaniający (a w znakomitej większości problemów tak jest), to zastanawiamy się nad następującymi kwestiami. Gdy proces osiągnie stan absorbujący, mówimy, że jest pochłonięty. W sposób naturalny pojawiają się pytania: Jakie jest prawdopodobieństwo, że proces osiągnie kiedykolwiek dany stan pochłaniający? Ile razy (średnio) proces przebywa w każdym stanie chwilowym, zanim zostanie pochłonięty? Jaki czas (średnio) upływa do momentu pochłonięcia procesu startującego z danego stanu chwilowego? Oczywiście, w ogólności, odpowiedzi na te pytania zależą od stanu początkowego procesu i od macierzy przejścia. Obliczenia te należy wykonać korzystając z odpowiednich twierdzeń oraz symulacyjnie, z pomocą własnoręcznie napisanego programu.
Program ten powinien mieć możliwość łatwej zmiany parametrów i analizy ich wpływu na własności procesu. Bardzo ważnym elementem są eksperymenty i analiza wyników. W każdym z zadań należy próbować postawić sobie własne pytania i podjąć próbę odpowiedzi na nie. Powodzenia!

opracowano na podstawie książki
INTRODUCTION to PROBABILITY, Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell