Modelowanie stochastyczne I

Procesy Markowa a wybory prezydenckie

THE TRUTH IS OUT THERE

Paweł Cibis
#136008
7 grudnia 2005

Zadanie 8. – Prezydent / głuchy telefon (lista dodatkowa)

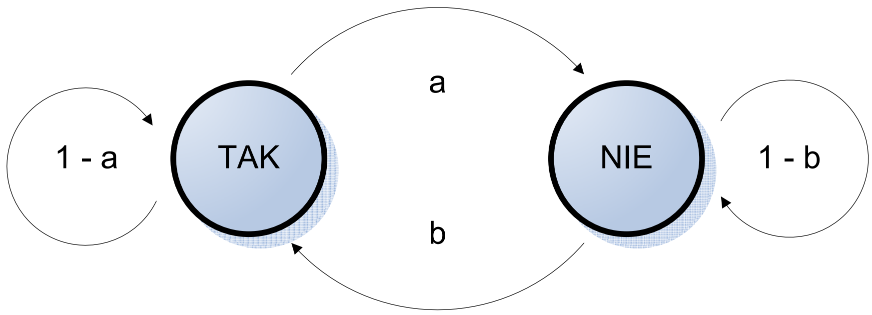
1. Zarys zagadnienia

Tematem zadania jest problem prawdy, a ściślej prawdziwości informacji przekazywanej przez jedną osobę kolejnej przy założeniu stałego prawdopodobieństwa zmodyfikowania konkretnej treści na jej całkowite przeciwieństwo podczas przekazywania jej kolejnej osobie. Informacja dotyczy zamiarów Prezydenta RP odnośnie jego starań o reelekcję w najbliższych wyborach prezydenckich. Jest to problem w tym momencie dość odległy, aczkolwiek być może istotny dla marketingowych decyzji przedsiębiorców zajmujących się przeprawami promowymi pomiędzy Polską a Szwecją. Stanem początkowym jest to, co usłyszy pierwsza osoba, czyli deklaracja przekazana jej z ust samego prezydenta (oczywiście bez zakłóceń, bo prezydentowi nie wypada kłamać). Może ona brzmieć „TAK" albo „NIE". W dalszej komunikacji mogą zajść następujące zdarzenia:

- „TAK" zostanie przekazane bez zniekształceń z prawdopodobieństwem $1 - a$,
- „NIE" zostanie przekazane bez zniekształceń z prawdopodobieństwem $1 - b$,
- „TAK" zostanie przekazane jako „NIE" z prawdopodobieństwem a,
- „NIE" zostanie przekazane jako „TAK" z prawdopodobieństwem b.

Parametry a i b są więc odpowiednimi prawdopodobieństwami kłamstwa, stałymi w danym procesie komunikacji. Zbiór stanów S ma więc postać $S = \{\text{TAK, NIE}\}$.

2. Graf stanów



3. Macierz przejscia

Ogólnie:

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Dla $a = 0$ i $b = 0{,}5$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Stan TAK jest pochłaniający, ponieważ nie da się już z niego wydostać, więc łańcuch jest pochłaniający.

Stan NIE jest wobec tego nieistotny – istnieje pewien stan (TAK), który jest dla niego osiągalny, ale stan NIE nie jest osiągalny ze stanu TAK. Stan ten jest również chwilowy – prawdopodobieństwo, że łańcuch wychodząc ze stanu NIE, dotrze do stanu NIE jest mniejsze od jedności, ponieważ prawdopodobieństwo przejścia ze stanu NIE do stanu TAK jest różne od zera.

Łańcuch ten nie jest ergodyczny, ponieważ nie ma możliwości przejścia z dowolnego stanu do dowolnego innego (w równie dowolnej ilości kroków). Ze stanu TAK nie można przejść do stanu NIE. Jednakże, gdyby oba prawdopodobieństwa a oraz b były dodatnie, łańcuch ten byłby ergodyczny.

Łańcuch ten nie jest również regularny, ponieważ nie istnieje taka potęga macierzy P, dla której wszystkie jej elementy byłyby dodatnie. Powodem jest istnienie stanu pochłaniającego TAK, z którego prawdopodobieństwo przejścia do stanu NIE jest równe 0 niezależnie od ilości kroków. Stąd $P^n(1,2)=0$, dla każdego n dodatniego.

Obliczmy teraz prawdopodobieństwo, że proces osiągnie kiedykolwiek stan pochłaniający TAK:

Jeżeli stanem początkowym jest TAK, to rozważania są zbędne i prawdopodobieństwo to wynosi jeden.

Jeżeli stanem początkowym jest NIE, posłużymy się następującym dowodem:

Ponieważ mamy tylko jeden stan nieabsorbujący NIE i stan TAK jest z niego osiągalny, minimalna liczba kroków, w których można przejść z NIE do stanu pochłaniającego wynosi jeden. Prawdopodobieństwo nie dotarcia w jednym kroku ze stanu NIE do TAK wynosi $1–b$, czyli 0,5. W takim razie prawdopodobieństwo nie osiągnięcia stanu TAK w dwóch krokach wynosi $(0,5)^2$. Ciągnąc to rozumowanie dalej, otrzymujemy przy n krokach prawdopodobieństwo równe $(0,5)^n$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty}(0,5)^n = 0$, to – korzystając z dopełnienia do jedynki – prawdopodobieństwo osiągnięcia kiedykolwiek stanu pochłaniającego wynosi 1. Dowód ten jest prawidłowy także dla innych wartości prawdopodobieństwa b (o ile jest ono różne od zera).

Wynik symulacji: P(absorpcji) = 1, dla 10000 przebiegów o maksymalnej długości 20.

Policzmy teraz ile przeciętnie razy proces przebywa w swoim jedynym stanie chwilowym NIE, zanim zostanie pochłonięty:

Należy najpierw sprowadzić macierz przejścia do postaci kanonicznej:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow P_f = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z tej macierzy łatwo wyodrębniamy podmacierz Q zawierającą prawdopodobieństwa przejść pomiędzy stanami nieabsorbującymi. Ponieważ w analizowanym przypadku istnieje tylko jeden taki stan, Q = 0,5. Wobec tego $I – Q$ = 0,5. Ze wzoru $N = (I - Q)^{-1}$ obliczamy macierz fundamentalną dla macierzy P. Jej elementy mówią o tym, ile średnio razy przed pochłonięciem proces odwiedzi dany stan chwilowy (odpowiadający numerowi kolumny macierzy N) jeżeli startuje ze stanu chwilowego odpowiadającego numerowi wiersza macierzy N. W tym przypadku $N = (1 – 0,5)^{-1} = 2$. Jeżeli więc prezydent zadeklaruje się nie startować w najbliższych wyborach, to informacja ta, przeciętnie rzecz biorąc, zostanie przekazana bez przekłamań dwukrotnie zanim na zawsze zostanie przekręcona.

Wynik symulacji: średnia ilość pobytów w stanie chwilowym NIE = 2,004 (dla 10000 przebiegów o maksymalnej długości 20)

Oczywiście przeciętny czas do absorpcji procesu startującego ze stanu chwilowego NIE wynosi również 2 (dwa przekazania informacji).

Wynik symulacji: w tym przypadku jest taki sami, jak dla średniej ilości pobytów w stanie chwilowym NIE.

4. Macierze P^2 i P^3 dla a = 0 i b = 0,5

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,875 & 0,125 \end{pmatrix}.$$

5. Analiza P^n, gdy n dazy do nieskoczanosci, dla $a = 0$ i $b = 0,5$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,969 & 0,031 \end{pmatrix},$$

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,999 & 0,01 \end{pmatrix},$$

$$P^{15} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przy tak zadanych prawdopodobieństwach przekazania „innej wersji prawdy”, osoba umiejscowiona bardzo daleko w łańcuchu komunikacyjnym prawie na pewno otrzyma informację o chęci ubiegania się przez prezydenta o reelekcję, niezależnie od jego faktycznych zamiarów.

6. Analiza P^n, gdy n dazy do nieskoczanosci, dla innych wartosci a i b

a) $a = b$ i a, b dodatnie, np. $a = b = 0,4$

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Jeżeli prawdopodobieństwo podania przeciwnej informacji, jest większe od zera i niezależne od jej treści, to po długim obiegu informacji odbiorca ma równe szanse na usłyszenie zarówno prawdy, jak i kłamstwa, niezależnie od prawdziwej decyzji prezydenta.

b) $a \neq b$ i a, b dodatnie, np. $a = 0,6$ $b = 0,9$

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad P^n \approx \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}, \text{ dla dużych wartości } n.$$

Prawdopodobieństwa usłyszenia prawdy bądź kłamstwa różnią się od siebie, ale nie zależą od deklaracji prezydenta (po wielokrotnym przekazaniu wiadomości).

W obu powyższych przypadkach łańcuchy były ergodyczne i regularne – z każdego stanu można przejść w pewnej liczbie kroków do każdego. A ściślej – nawet w jednym, więc już macierz P nie posiada elementu o wartości 0, toteż łańcuch ten jest regularny.

c) $a = b = 0$

$$P = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Informacja jest przekazywana idealnie dokładnie – każdy członek łańcucha komunikacyjnego pozna prawdziwe zamiary prezydenta. Deterministyczny ciąg, niezbyt ciekawy z punktu widzenia analizy procesów Markowa.

Łańcuch taki jest pochłaniający. Nie posiada stanów chwilowych, gdyż wszystkie jego stany są pochłaniające.

d) $a = b = 1$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}.$$

Sytuacja, w której każda osoba odwraca usłyszaną informację. W ten sposób co druga osoba (nieparzysta, licząc od pierwszego „powiernika” prezydenta) na pewno usłyszy prawdę, a co druga (parzysta) usłyszy kłamstwo. Taki ciąg jest deterministyczny, więc wystarczy znać swoją pozycję w łańcuchu komunikacyjnym, by poznać prawdę.

Można teraz uogólnić wniosek z poprzedniego punktu – jeżeli tylko prawdopodobieństwa kłamstw nie są równocześnie równe 0 bądź 1, prawdopodobieństwo usłyszenia prawdy lub kłamstwa po wielokrotnym przekazaniu informacji nie zależy od deklaracji prezydenta.

7. Analiza zbieznosci ilorazów prawdopodobienstw

Załóżmy (korzystając z obserwacji w poprzednich punktach), że:

$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} p_b & p_a \\ p_b & p_a \end{pmatrix}$, gdzie a i b należą do przedziału (0,1).

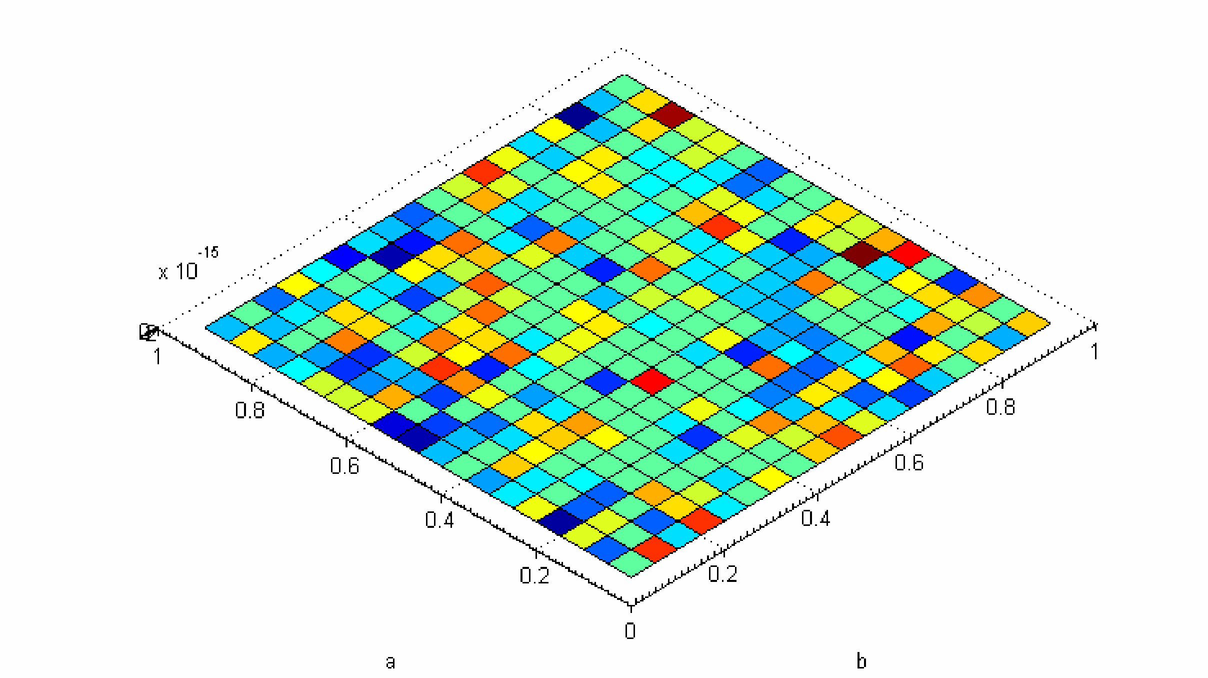
Obserwacja: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p_a}{p_b}$.

Sprawdzenie symulacyjne:

Obliczmy wartości lewej strony równania dla pewnej liczby argumentów a oraz b. Następnie przeprowadźmy analogiczne obliczenia dla prawej strony i argumentów p_a oraz p_b. Ponieważ nie możemy wyznaczyć numerycznie tych granicznych prawdopodobieństw, posłużymy się ich przybliżeniami dla dostatecznie dużego n (np. n = 10000). Policzmy względne różnice (błędy) pomiędzy lewą a prawą stroną równania, traktując lewą stronę, jako wynik dokładny. Na tej podstawie będziemy mogli poznać rząd wielkości błędu oraz sporządzić wykres błędów.

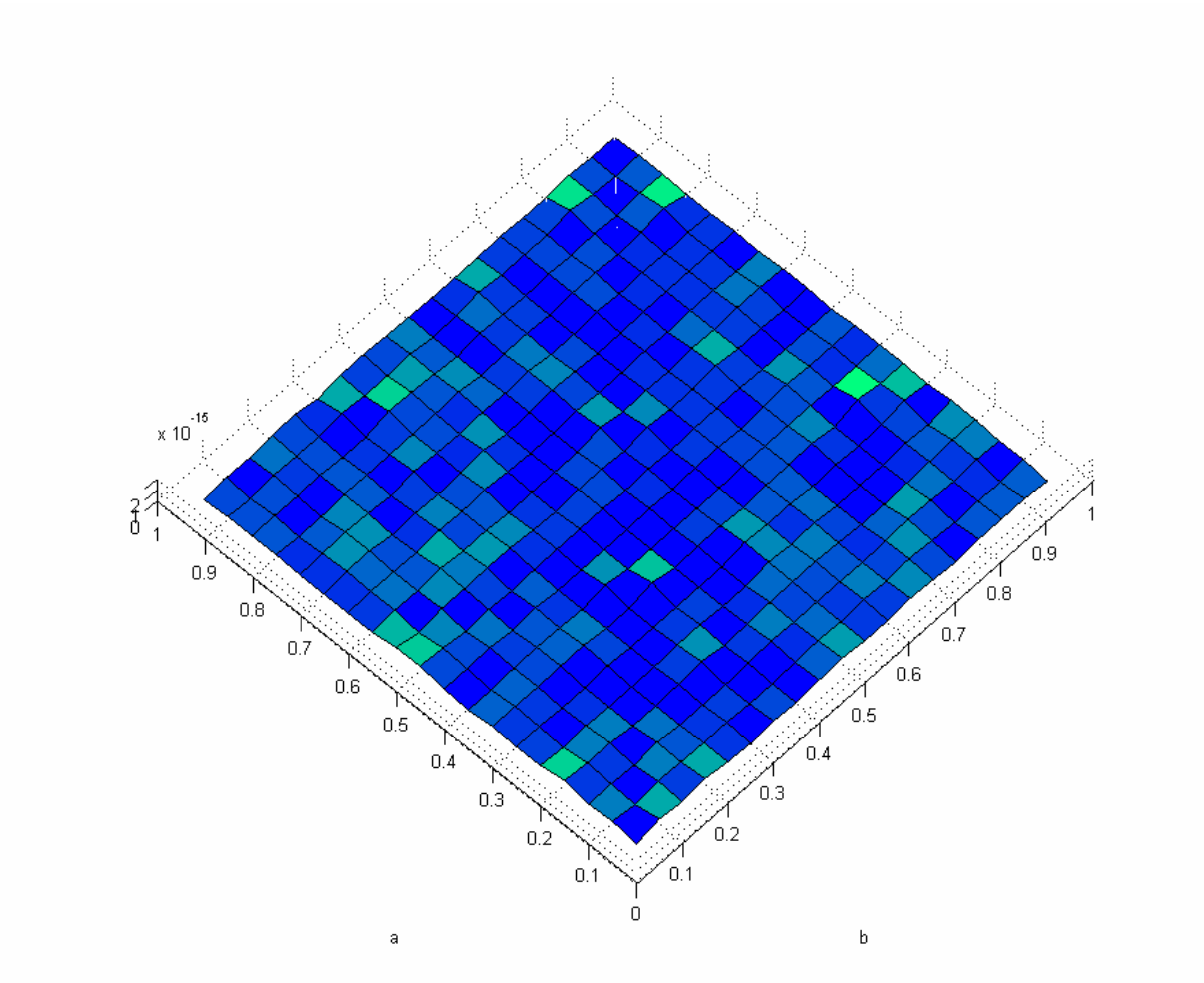
Wyniki dla n = 10000 oraz a i b zmieniających się co h = 0,05:

Wartość bezwzględna największego błędu względnego = 6.740639792367022e-016 [%].



Rysunek 1. Wykres błędów – paleta barw zgodna z mapą hipsometryczną (kolor zielony – wartość ok. 0) .

Otrzymane rezultaty sugerują prawdziwość obserwacji. Wzrokowa analiza wykresu błędów (spłaszczonego dla większej czytelności) wskazuje także na pewną symetrię – jeżeli dla $a = a_0$ i $b = b_0$ przybliżone p_a/p_b było większe od a/b, to dla $a = b_0$ i $b = a_0$ przybliżenie p_a/p_b będzie mniej więcej o tyle samo mniejsze od a/b. Obserwację tę potwierdza wykres wartości bezwzględnych błędów względnych.



Rysunek 2. Wartości bezwzględne błędów względnych.