Modelowanie stochastyczne
Lista 4
(uzupełnienie do listy standardowej)

1. Transplantacja nerki
Dwie osoby, nazwijmy je A i B oczekują na transplantację nerki. Jeżeli osoba A nie otrzyma nowej nerki, umrze po czasie będącym zmienną o rozkładzie wykładniczym z parametrem m_A. Podobnie B – z parametrem m_B. Nerki do transplantacji pojawiają się zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ. Zdecydowano, że pierwsza dostępna nerka trafi do osoby A (albo do osoby B, jeżeli B będzie nadal żyła, a A już nie), następna do B (oczywiście, jeżeli osoba ta będzie wciąż żyła).
Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba A otrzyma nową nerkę? Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba B otrzyma nową nerkę? Odpowiedzieć na te pytania stosując techniki symulacyjne. Postawić inne pytania, można zmodyfikować model (na przykład wprowadzając prawdopodobieństwo odrzucenia przeszczepu).

2. Autostrada I
Samochody przejeżdżają przez pewien punkt autostrady zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ. Jeżeli Maks przebiegnie przez autostradę, nie zwracając uwagi na samochody może wpaść pod jeden z nich. Jaka jest szansa, że to się stanie, w zależności od czasu, jaki potrzebny jest mu na przebiegnięcie przez jezdnię? Jak to wygląda, jeżeli założymy, że potrafi uniknąć jednego samochodu, krzywdę zrobi mu dopiero następny? Postawić inne pytania, zmodyfikować model.

3. Podział komórek
Pewna teoria naukowa stwierdza, że pomyłki w podziale komórek występują zgodnie z procesem Poissona o intensywności 2,5 w ciągu roku i osoba, u której wystąpi 196 takich pomyłek umiera. Załóżmy, że taka teoria jest prawdziwa:

- Jaka jest średnia długość życia?
- Jaka jest wariancja tej długości?
- Jaka jest szansa, że osoba umrze przed osiągnięciem wieku 67,2 roku?
- Jaka jest szansa, że osoba dożyje wieku 90 lat? A jaka dla 100 lat? Może można narysować krzywą przeżycia?

Postawić inne pytania i spróbować odpowiedzieć na nie technikami symulacyjnymi.

4. Autostrada II
Samochody przejeżdżają przez pewien punkt na autostradzie zgodnie z procesem Poissona o intensywności jednostkowej na minutę. Jeżeli 5% z tych samochodów to vany, policzyć:

- Szansę, że w ciągu godziny przejedzie przynajmniej jeden van.
- Załóżmy, że w vanie znajduje się średnio 5 osób, w pozostałych samochodach 3 osoby. Policzyć średnią liczbę osób przewożonych przez samochody na tym odcinku autostrady.

Zmodyfikować model i postawić dodatkowe pytania.

opracowano na podstawie książki
Introduction to Probability Models, Sheldon M. Ross

<u>Dodatek – algorytmy symulacji procesów Poissona</u>

Jednorodny proces Poissona o intensywności λ

Kolejne momenty skoków (sygnały) jednorodnego procesu Poissona $T_1, T_2, \ldots, T_n$ generujemy zgodnie z następującym algorytmem:

(1) $T_0 = 0$

(2) dla $i = 1, 2, \ldots, n$

 (2a) generujemy zmienną E o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ

 (2b) bierzemy $T_i = T_{i-1} + E$

Niejednorodny proces Poissona z funkcją intensywności $\lambda(t)$

Kolejne sygnały niejednorodnego procesu Poissona $T_1, T_2, \ldots, T_n$ generujemy zgodnie z następującymi algorytmami:

<u>Sposób 1</u>

Definiujemy $F_s(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(s+v)dv\right)$; jeżeli umiemy znaleźć funkcję odwrotną do $F_s(t)$, to:

(1) $T_0 = 0$

(2) dla $i = 1, 2, \ldots, n$

 (2a) generujemy zmienną losową U o rozkładzie jednostajnym na przedziale (0,1)

 (2b) bierzemy $T_i = T_{i-1} + F_s^{-1}(U)$

<u>Sposób 2</u> *(thinning* or *rejection method)*

Znajdźmy stałą $\overline{\lambda}$ taką, że $\lambda(t) \le \overline{\lambda}$ dla każdego t

(1) $T_0 = 0$ i $T^* = 0$

(2) dla $i = 1, 2, \ldots, n$

 (2a) generujemy zmienną E o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\overline{\lambda}$

 (2b) bierzemy $T^* = T^* + E$

 (2c) generujemy zmienną losową U o rozkładzie jednostajnym na przedziale (0,1)

 (2d) jeżeli $U > \lambda(T^*)/\overline{\lambda}$ to wracamy do punktu (2a) (czyli odrzucamy wygenerowany moment skoku procesu) w przeciwnym wypadku $T_i = T^*$ (czyli akceptujemy wygenerowany moment skoku)