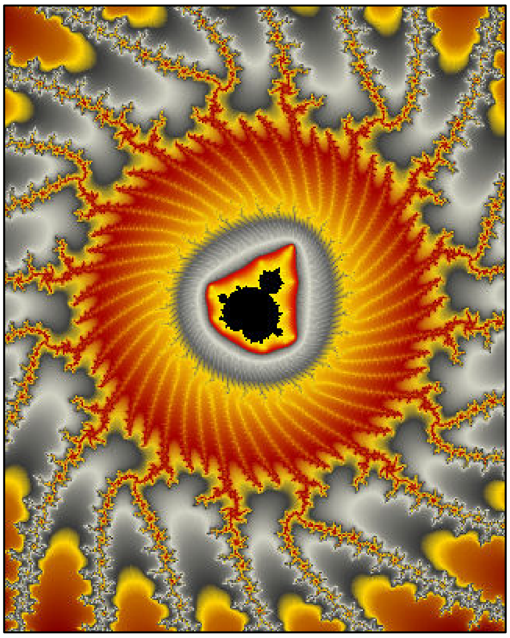
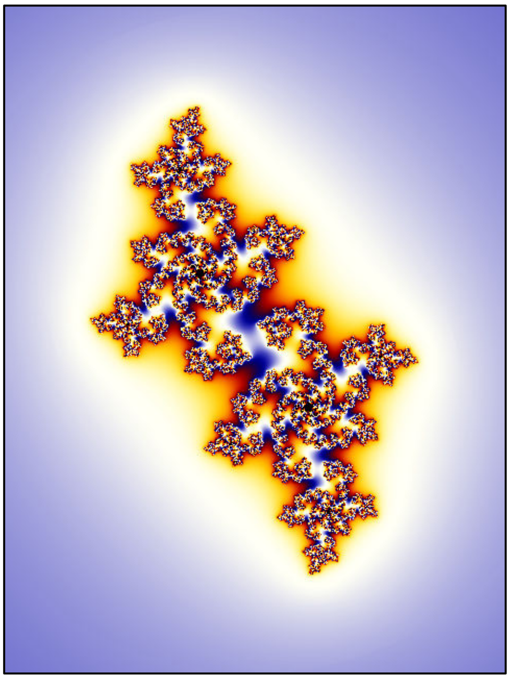
Modelowanie stochastyczne II

Fraktale





Paweł Cibis

#136008

21 kwietnia 2006

1. Pojęcie fraktala

Fraktal (łac. *fractus* – złamany, cząstkowy) to zbiór punktów odpowiedniej przestrzeni euklidesowej (np. płaszczyzny), dla którego dwie wielkości matematyczne – wymiar topologiczny i wymiar Hausdorffa – są różne. Dla fraktala mianowicie wymiar Hausdorffa nie jest liczbą całkowitą.

Za jedną z cech charakterystycznych fraktala uważa się samopodobieństwo, to znaczy podobieństwo fraktala do jego części. Co więcej, zbiory fraktalne mogą być samoafiniczne, tj. część zbioru może być odwzorowaniem całości przez pewne przekształcenie afiniczne. Dla figur samopodobnych można określić wielkość zwaną wymiarem samopodobieństwa. Niektóre fraktale cechuje nieskończone samopodobieństwo – dowolnie mały fragment oglądany w znacznym powiększeniu przypomina cały fraktal.

Pojęcie fraktala wprowadził w 1975 Benoit Mandelbrot. Same konstrukcje tego typu, były znane już wcześniej – np. w 1883 roku Georg Cantor zaproponował zbiór nazwany później jego imieniem. Jednakże to właśnie Mandelbrot stworzył spójną teorię opisującą wszystkie fraktale. Jako trzy charakterystyczne cechy fraktali wymienił – wspomniane już wcześniej – samopodobieństwo i niecałkowity wymiar oraz wyrażanie ich konstrukcji, nie za pomocą wzoru matematycznego, lecz zależności rekurencyjnej.

2. Zbiór Mandelbrota

2.1 Benoit Mandelbrot

Benoît B. Mandelbrot (ur. 20 listopada 1924, w Warszawie) – francuski matematyk, pochodzenia polskiego.

W latach 1949-1957 mieszkał we Francji. Pracował w Centre national de la recherche scientifique w Paryżu, a następnie na Uniwersytecie w Lille. Od 1957 roku pracował w USA dla firmy IBM, miał zatem dostęp do najnowocześniejszych (na owe czasy) komputerów. Mandelbrot dotarł do prac dwóch francuskich matematyków: Gastona Julii i Pierre'a Fatou, którzy badali zachowanie się iteracji pewnych funkcji zespolonych. Mandelbrot wykorzystał do tego celu komputery. Uzyskane przez niego wykresy przerosły najśmielsze oczekiwania. Otrzymane rysunki miały fantastyczne kształty. Niezależnie od powiększenia ukazywały coraz to nowe szczegóły. Były to fraktale.

Mandelbrot w 1993 r. został uhonorowany Nagrodą Wolfa w fizyce, a w 2003 r. został wyróżniony prestiżową Nagrodą Japońską.

2.2 Opis teoretyczny

Zbiór Mandelbrota (zwany też czasami żukiem lub żuczkiem Mandelbrota) kontruowany jest na płaszczyźnie zespolonej.

Niech:

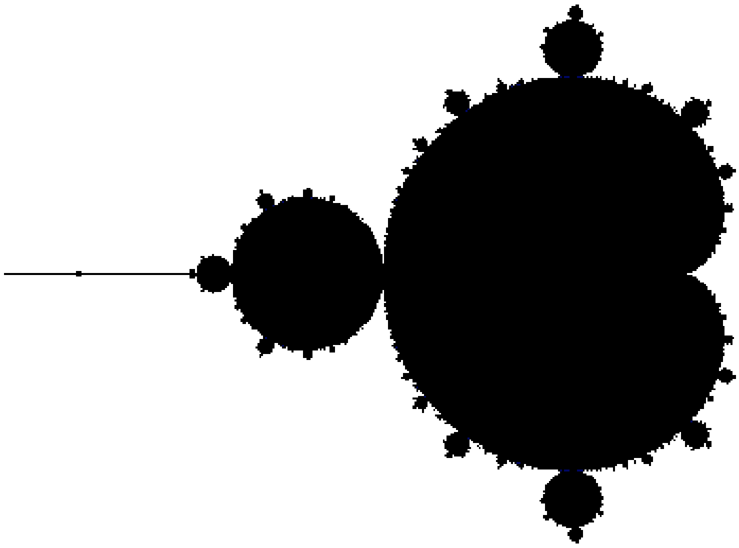
$$p = x + yi\,,$$
$$z_0 = 0\,,$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + p\,.$$

Zbiór Mandelbrota tworzą te punkty, dla których zachodzi: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq \infty$

(lub równoważnie $\forall_{n\geq 0} \left|z_n\right| < 2$).

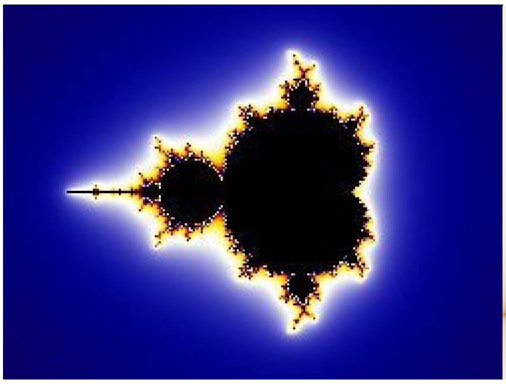
2.3 *Wizualizacja*

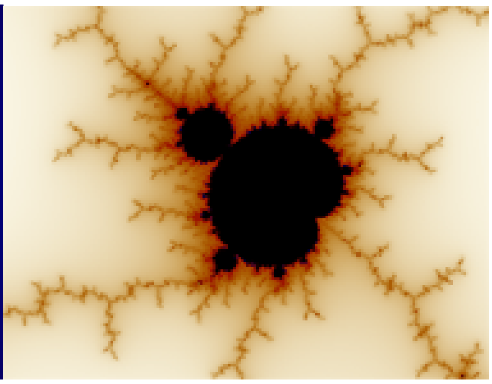
W wersji oryginalnej zbiór punktów należących do zbioru Mandelbrota zaznacza się kolorem czarnym. W efekcie powstaje następujący obraz:



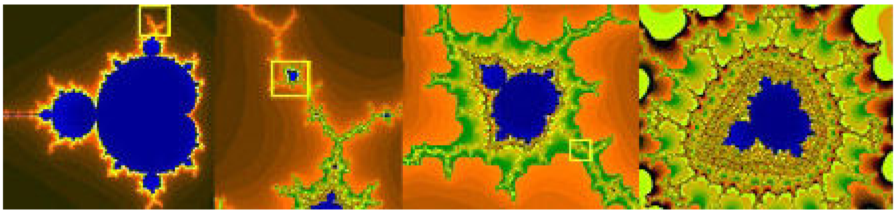
Jednakże ciekawe wizualne efekty uzyskuję się dzięki pewnym modyfikacjom tej reguły – np. kolor danego punktu można uzależnić od tego, jak wiele wyrazów ciągu z_n znajduje się w kole o promieniu 2 (czyli od ilości iteracji, po której wyrazy ciągu opuszczą koło). Dodatkowo, wykorzystując możliwości programów graficznych, nieraz zaprojektowanych specjalnie do konstrukcji fraktali, można stworzyć imponujące obrazy. Ich autorzy często oferują swoje prace w Internecie, co umożliwia amatorom tego typu sztuki, zdobycie swojego ulubionego fraktala w znacznie bardziej namacalnej formie.

Oto kilka przykładów kolorystycznych modyfikacji żuczka Mandelbrota:

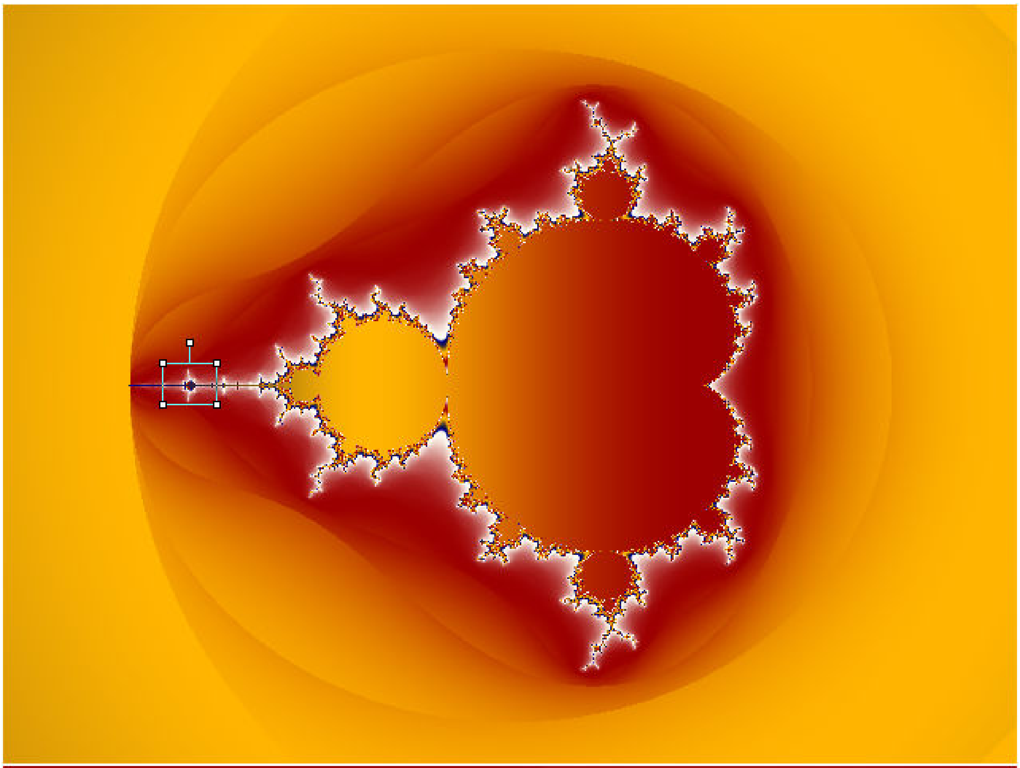


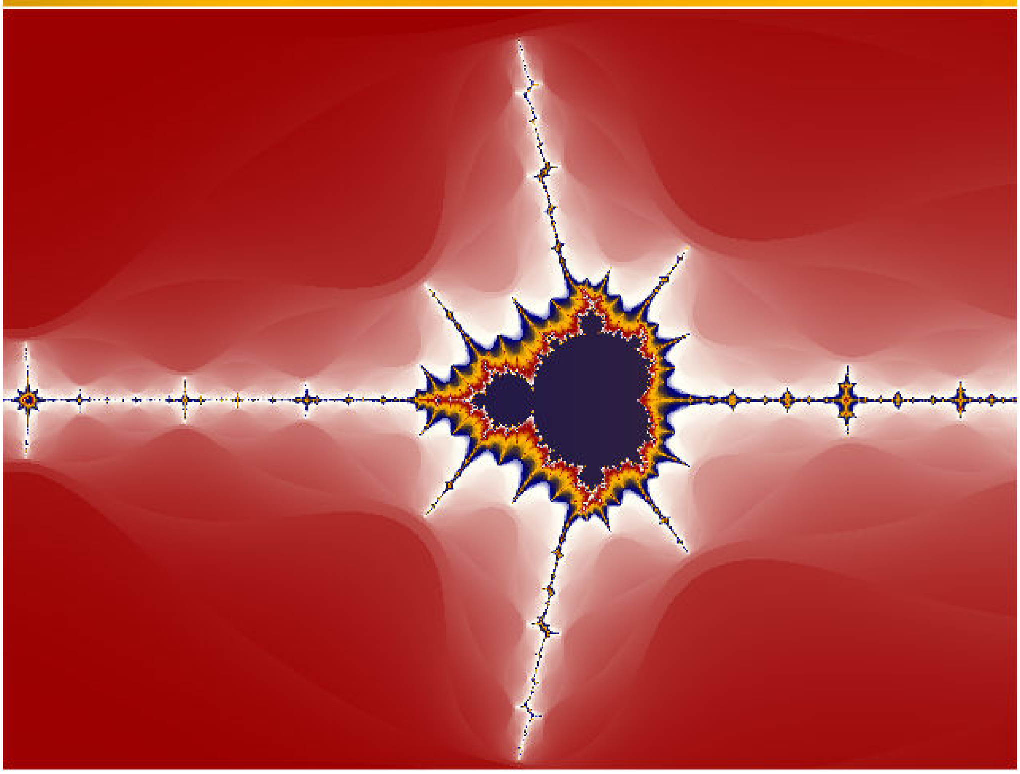


Sampodobieństwo ujawniające się przy powiększaniu kolejnych fragmentów fraktala:



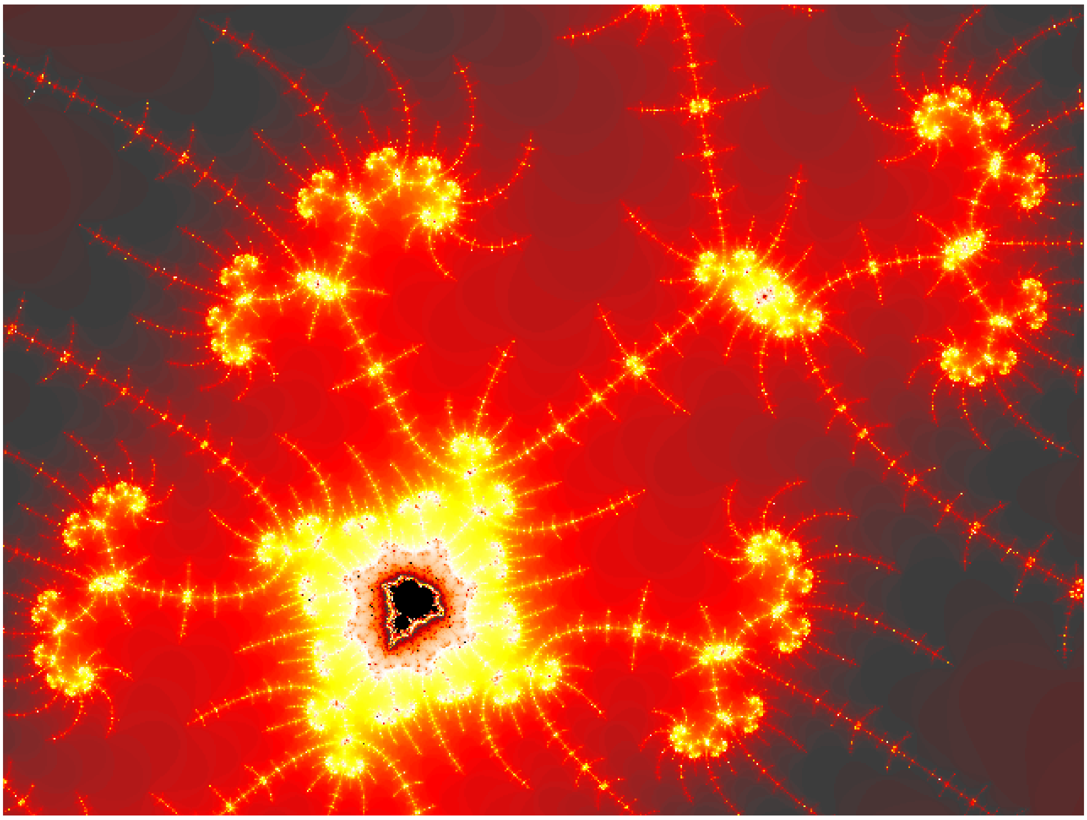
Inny przykład samopodobieństwa:



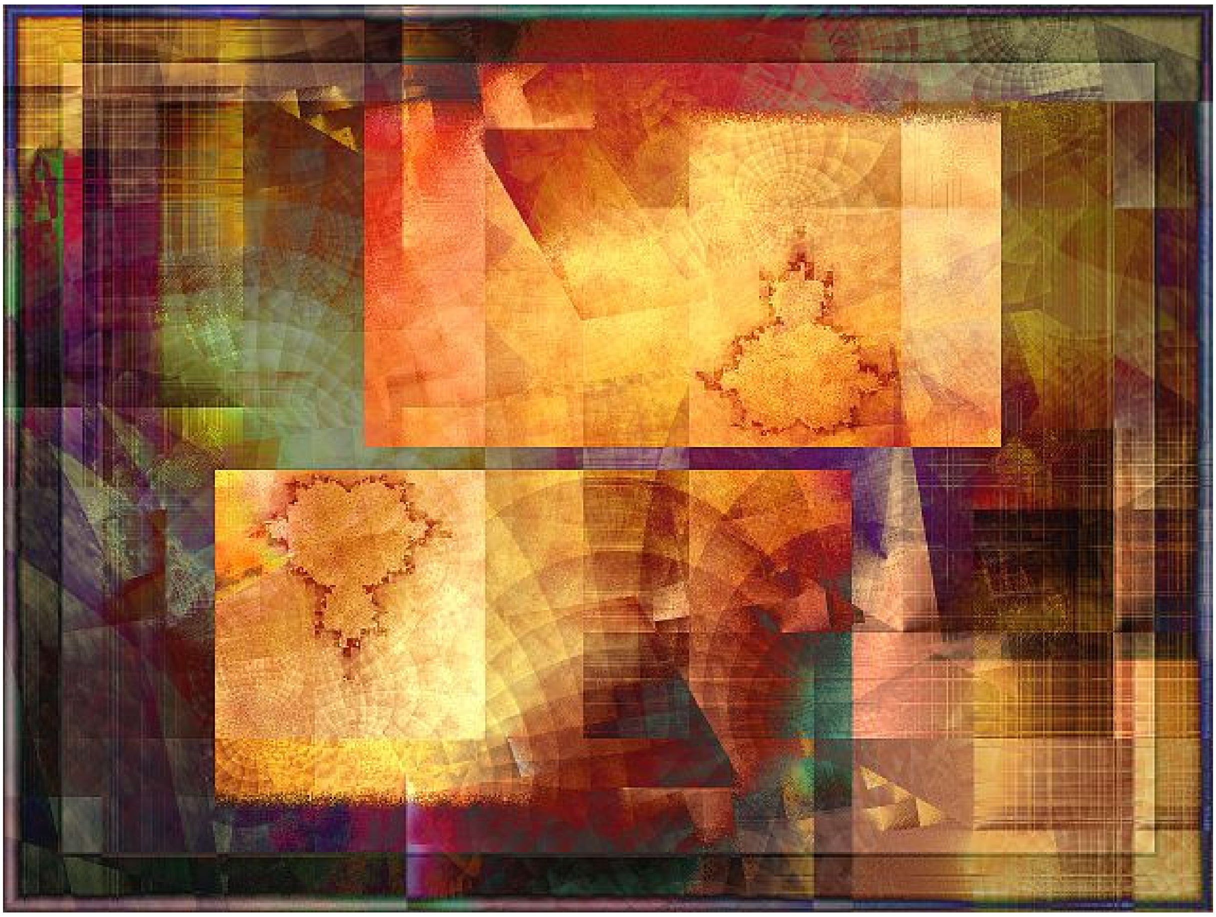


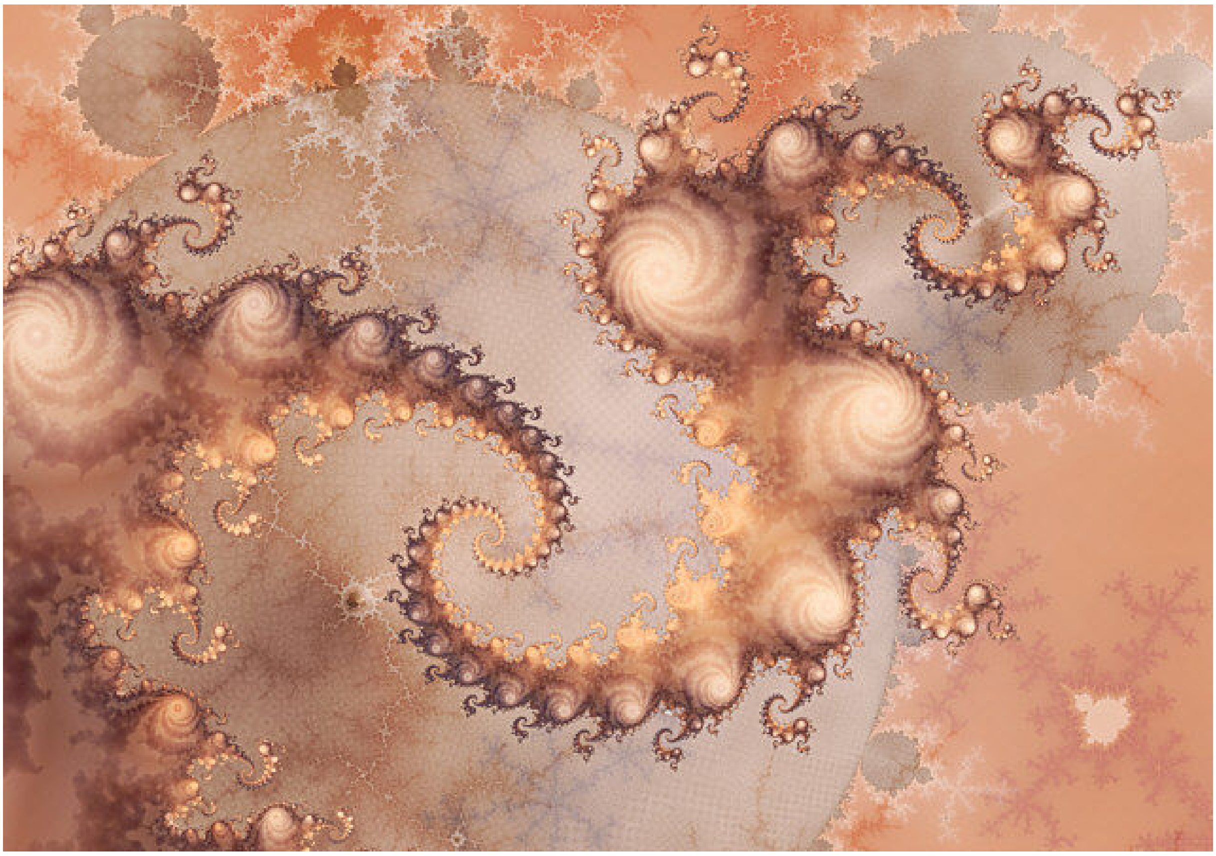
Żuczek (a właściwie to, co z niego zostało) po grubo ponad 100 różnych przekształceniach w programie graficznym:

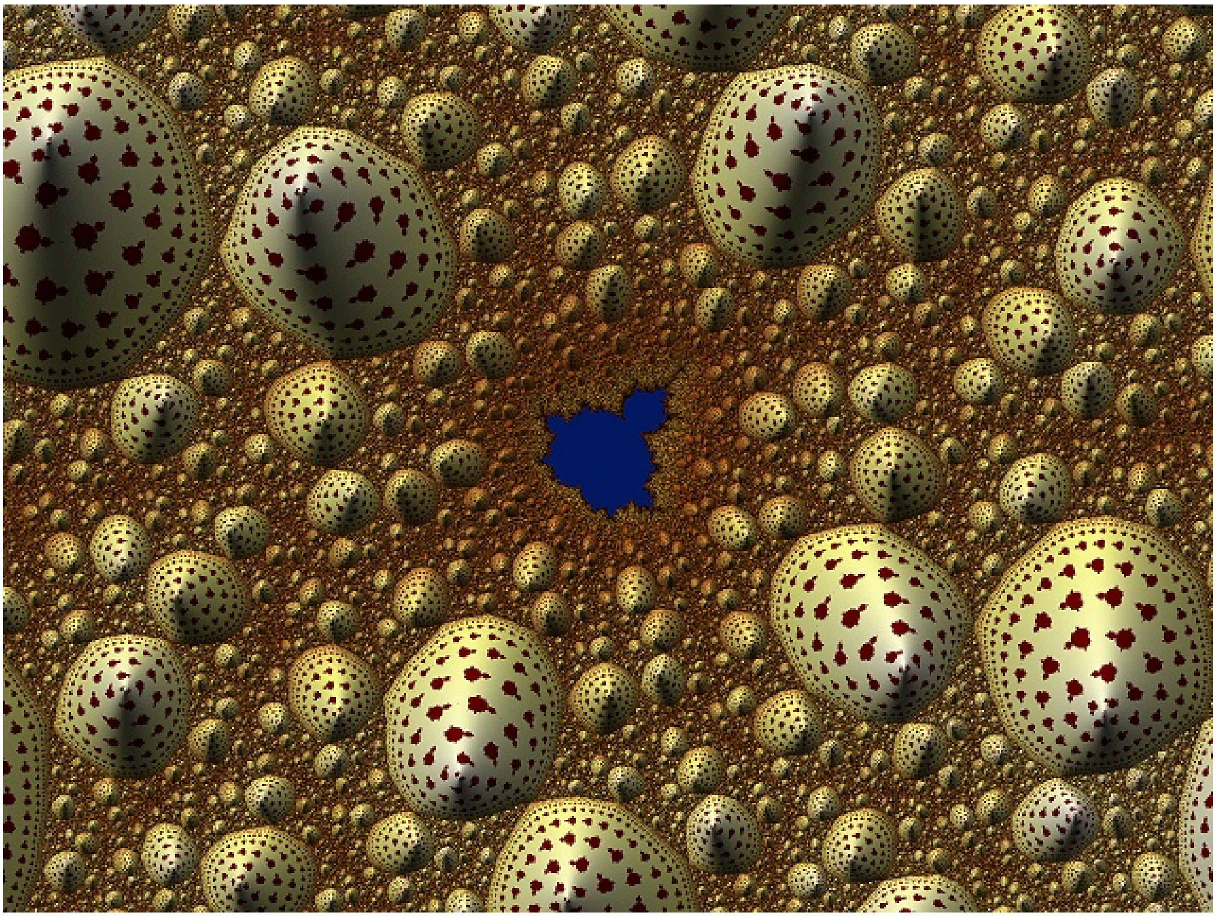
Fraktalne „fajerwerki”:



Kilka innych wariacji na temat żuka, wyróżnionych w konkursie Fractal-Art 2000 Contest:

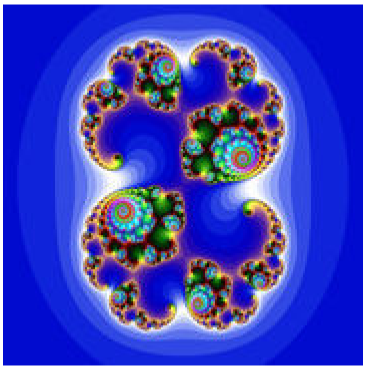






2.4 *Ciekawostki*

Zbiór Mandelbrota jest blisko związany z inny fraktalem zwanym zbiorem Julii. Oto jeden z jego nieskończonej ilości wariantów:



Jego konstrukcja jest bardzo podobna do słynnego żuczka.

Niech:

$$p = x + yi\,,$$

$$z_0 = p\,,$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c\,.$$

Zbiór Julii tworzą te punktu, dla których zachodzi: $\lim_{n\to\infty} z_n \neq \infty$ (lub równoważnie $\forall_{n\geq 0} \left|z_n\right| < 2$).

Parametr c jest tutaj liczbą zespoloną, od której zależy kształt zbioru Julii. Można teraz zdefiniować żuczka Mandelbrota, w oparciu o zbiór Julii – jest to zbiór tych wszystkich parametrów c, dla których zbiór Julii jest spójny. Stąd zbiór Mandelbrota określa się czasami mianem mapy zbiorów Julii. Na bazie punktów leżących blisko jego krawędzi można stworzyć wyjątkowo piękne fraktale.

3. *Diagram Feigenbauma*

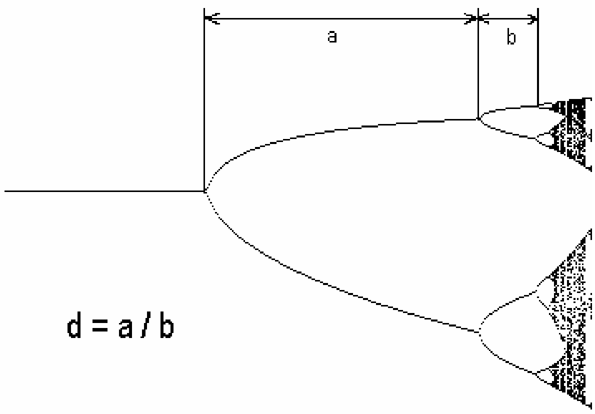
3.1. *Mitchell Feigenbaum*

Mitchell J. Feigenbaum (ur. 19 grudnia 1944 r.) – amerykański fizyk i matematyk, największą popularność zawdzięcza matematyce i badaniu teorii chaosu – odkrycie nowej stałej matematycznej, później nazwanej jego nazwiskiem.

Syn polsko-ukraińskich emigrantów. Pomimo faktu, że zdawanie egzaminów przychodziło jemu z łatwością, to jednak nie mógł odnaleźć się w szkołach Tilden High School, Brooklyn oraz City College w Nowym Jorku. W końcu rozpoczął studia w Massachusetts Institute of Technology w 1964 roku. Chociaż rozpoczynał je na kierunku inżynierii elektrycznej to zmienił kierunek na fizykę, po czym w 1970 obronił doktorat na tym kierunku na temat "thesis on dispersion relations".

Po krótkim pobycie na uniwersytecie w Cornell i w Instytucie Politechniki w Wirgini, zaoferowano mu długoterminowy kontrakt w Los Alamos w badaniu turbulencji. Chociaż Feigenbaum oraz grupa naukowców, w której pracował nie była w stanie rozwikłać niesamowicie trudnej teorii turbulencji w cieczach, to jego odkrycia zaprowadziły go do studiowania chaotycznej kartografii. Aktualnie (od 1986) jest profesorem Toyoty na Uniwersytecie Rockefellera.

W 1975 Feigenbaum, wykorzystując komputer HP-65, odkrył, że współczynnik różnicy pomiędzy kolejnymi przybliżeniami wartości przy których pojawia się bifurkacja, oscyluje około stałej liczby d=4,6692. Pokazał także, że takie samo zachowanie i ta sama stała pojawia się w szerokiej klasie matematycznych funkcji mających silny związek z chaosem. Stała Feigenbauma pozwoliła matematykom na pierwszy olbrzymi krok do odkrywania pozornie trudnych „losowych" zachowań systemów chaotycznych. Ten „współczynnik konwergencji" jest dziś znany pod nazwą stała Feigenbauma.



W 1983 otrzymał nagrodę MacArthur Fellowship. W 1986 został uhonorowany Nagrodą Wolfa w fizyce.

3.2 Opis teoretyczny

Logistyczny model populacji uwzględnia dwa zjawiska:

- rozmnażanie w tempie proporcjonalnym to aktualnej wielkości populacji;
- wymieranie z głodu w tempie proporcjonalnym do różnicy pomiędzy pewną maksymalną wielkością populacji, a bieżącym jej rozmiarem.

Model ten można wyrazić wzorem:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)\,,$$

gdzie:

x_n – liczba z przedziału od zera do jeden oznaczająca rozmiar populacji w n-tym roku (dla n=0 jest to stan początkowy);

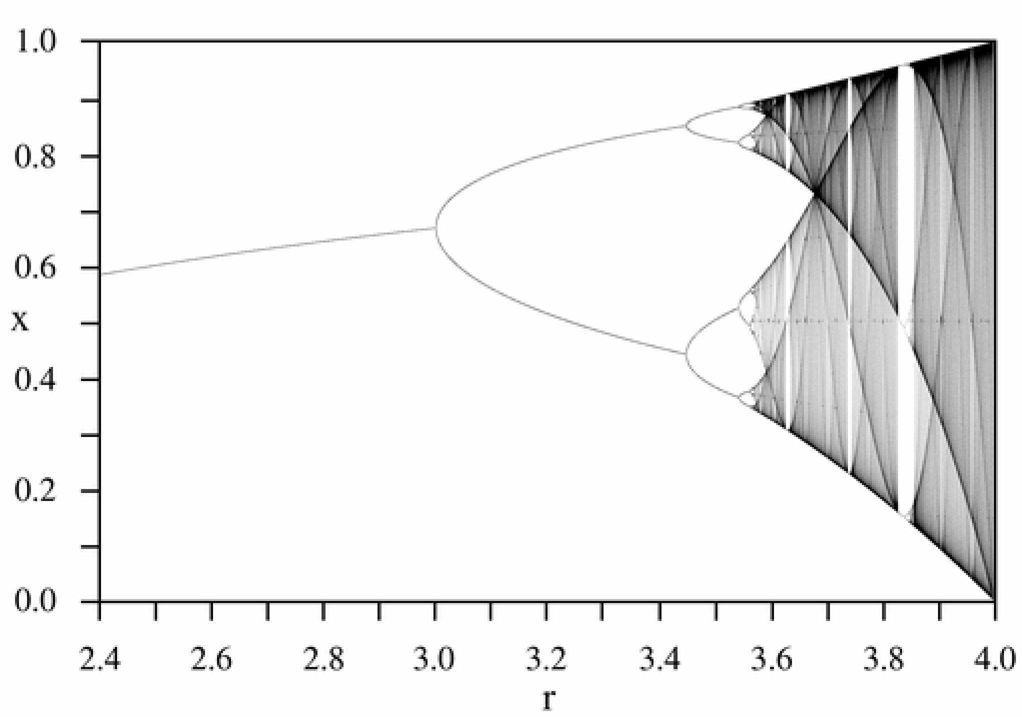
r – dodatnia liczba oznaczająca stosunek pomiędzy stopą wzrostu populacji (rozmnażanie), a wymierania (z głodu).

Zależnie od wielkości parametru r, można zaobserwować różne zachowanie populacji:

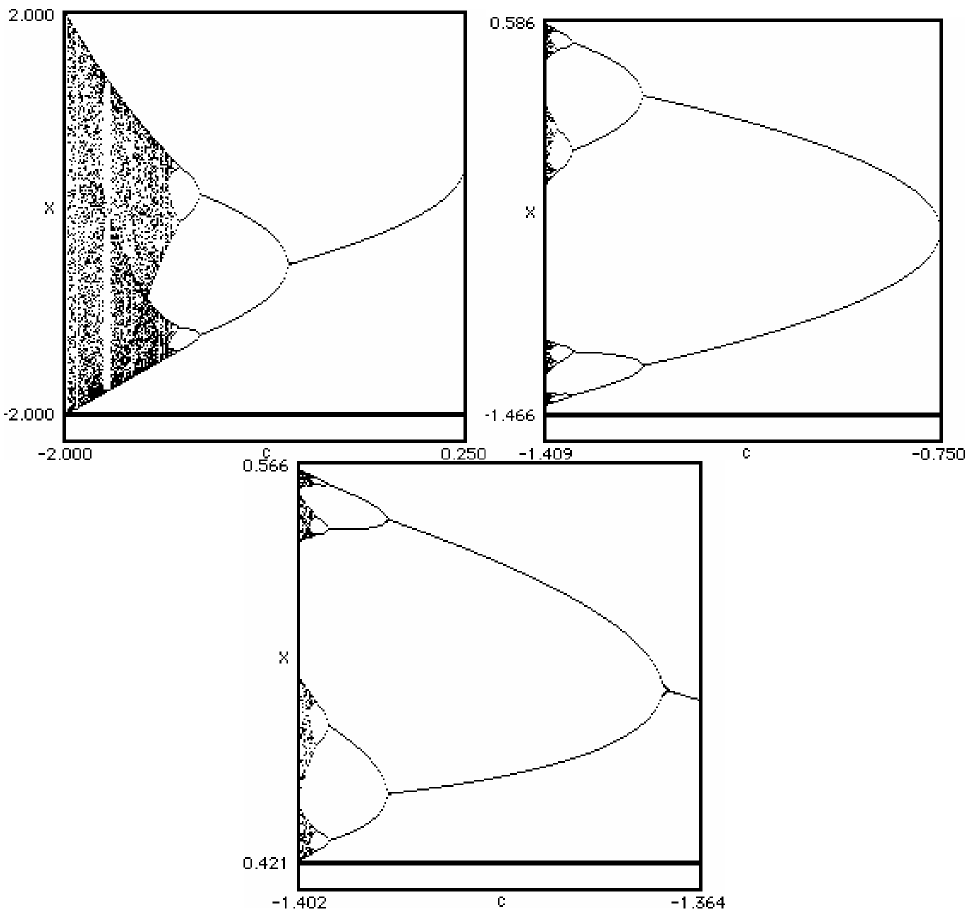
- jeżeli r należy do przedziału od 0 do 1, populacja ulegnie całkowitemu wymarciu, niezależnie od jej początkowej liczebności (ponieważ osobniki szybciej umierają z głodu, niż się rozmnażają);
- jeżeli r znajduje się pomiędzy 1 a 2, wielkość populacji, niezależnie od jej początkowego rozmiaru, szybko ustabilizuje się na wartości $\frac{r-1}{r}$;
- jeżeli r należy do przedziału od 2 do 3, wielkość populacji ustabilizuje się na wartości $\frac{r-1}{r}$, niezależnie od jej początkowego rozmiaru, ale wcześniej będzie przez pewien czas oscylować wokół niej (rząd zbieżności wynosi 1 za wyjątkiem r=3, dla którego jest znacznie mniejszy);
- jeżeli r znajduje się pomiędzy 3 a $1+\sqrt{6}$ wielkość populacji będzie stale oscylować pomiędzy dwiema wartościami, które zależą od r, ale są niezależne od początkowego rozmiaru populacji;
- jeżeli r znajdzie się w przedziale od $1+\sqrt{6}$ do około 3,54, sytuacja będzie wyglądała analogicznie, jak w poprzednim przypadku, ale rozmiar populacji będzie tym razem oscylował pomiędzy 4 wartościami;
- wraz z dalszym (ale niewielkim) zwiększaniem wartości r ponad wartość ok. 3,54, rozmiar populacji będzie oscylował wokół kolejno:8, 16, 32, itd. wartości; długość przedziałów, na których populacja przyjmuje jeden z kilku możliwych rozmiarów będzie się szybko zmniejszał wraz ze wzrostem r; równocześnie stosunek długości dwóch kolejnych takich przedziałów (poprzedni do następnego) będzie zbiegał do stałej Feigenbauma; zachowanie to wciąż nie zależy od początkowego rozmiaru populacji;
- większość wartości r przekraczających 3,57 powoduje chaotyczne zachowanie się wielkości populacji, jednakże w pewnych punktach – zwanych „wyspami stabilności" – ponownie oscyluje ona wokół kilku wartości; niewielka zmiana parametru $ pozwala wyprowadzić system ze stanu stabilnego do chaotycznego i vice versa; początkowa wielkość populacji również nie ma wpływu na to zjawisko;
- dla r>4 rozmiar populacji wychodzi poza przedział [0,1] i jest rozbieżny dla prawie wszystkich wartości początkowych.

3.3 *Wizualizacja*

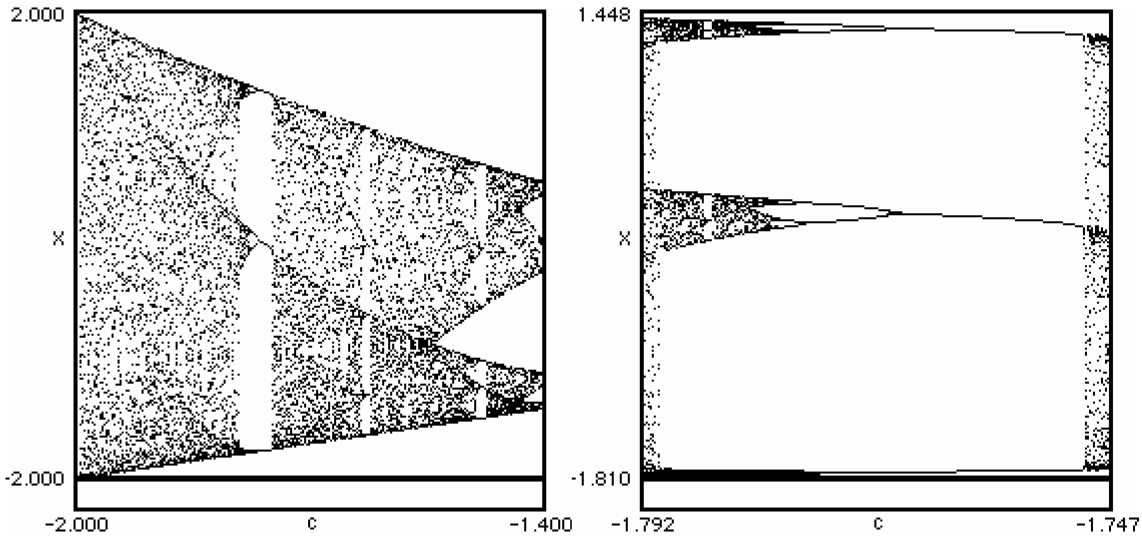
Diagram bifurkacji Feigenbauma:



Charakterystyczne „okna” obrazujące obszar rozwidleń (bifurkacji) charakteryzują się samoodobieństwem. Jedno rozdwojenie, kończy się dwoma następnymi, a tamte kolejnymi, itd.:

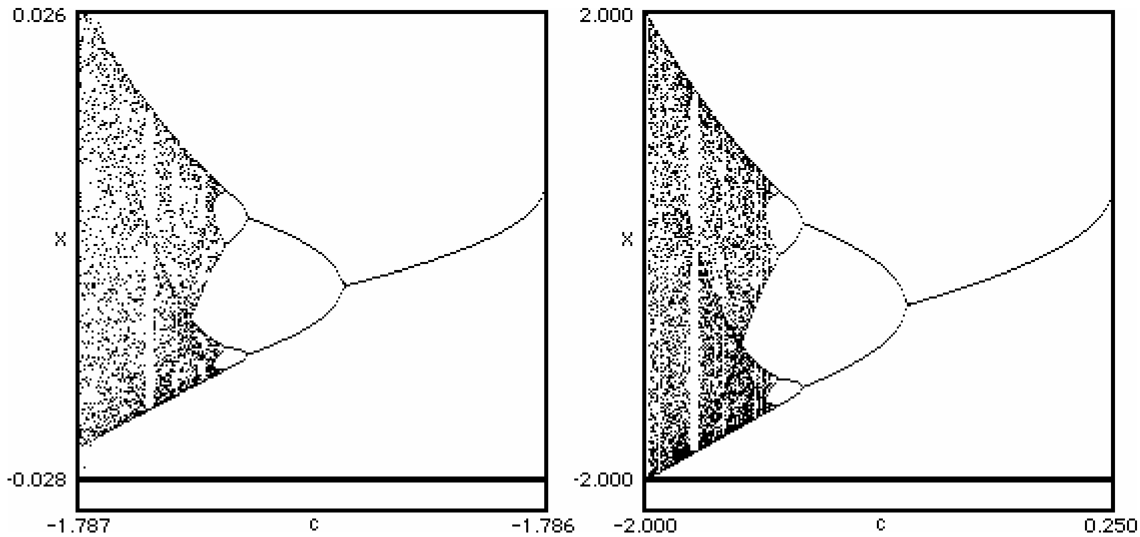


„Wyspa stabilności” i jej powiększenie:



W tym przypadku z chaosu wyłaniają się 3 stany, które ulegają dalszej bifurkacji, tworząc ciąg 3-, 6-, 12-, 24-stanowy, itd.

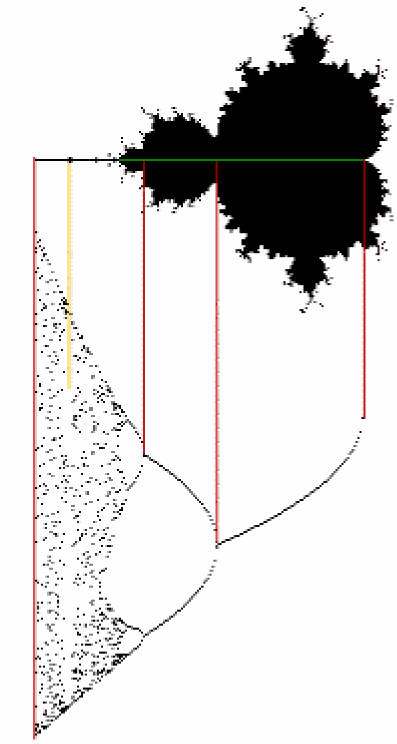
Po 1000-krotnym powiększeniu środkowego „okna” w największej „wyspie stabilności” otrzymujemy obraz łudząco podobny do całego fraktala (dla porównania zamieszczony po prawej stronie):



3.4 Ciekawostki

Diagram Feigenbauma jest drzewem. Swoistym zbiegiem okoliczności jest jego związek z nazwiskiem amerykańskiego uczonego – Feigenbaum po niemiecku oznacza w wolnym tłumaczeniu drzewo figowe i czasami fraktal ten jest tak potocznie nazywany.

Zaobserwowano związek pomiędzy diagramem Feigenbauma a zbiorem Mandelbrota. Jeżeli zrzutujemy charakterystyczne punkty pierwszego z fraktali (początek, koniec, miejsca bifurkacji) na oś symetrii żuczka, znajdą się one w równie kluczowych miejscach dla tego fraktala (początek, koniec, punkty rozpoczynające kolejny samopodobny fragment).



4. Bibliografia

1. Eugeniusz Michał Melnyczok „Systemy funkcji iterowanych"
2. Wikipedia EN
3. Wikipedia PL
4. www.ddewey.net/mandelbrot
5. www.fractalartcontests.com
6. www.fractalus.com
7. www.ultrafractal.com