Modelowanie stochastyczne II

Sprawozdanie 3

Paweł Cibis
#136008
24 maja 2006

1. Opis problemu

Na podstawie symulacji Monte Carlo procesu ryzyka należy zbadać zachowanie się prawdopodobieństwa ruiny $\psi(u,T) = P(\inf_{0<t<T}\{R_t\}<0)$ dla skończonego horyzontu czasowego T i zadanego kapitału początkowego u. Rozważany jest jednorodny i niejednorodny proces Poissona oraz proces odnowy. Wysokość odszkodowań modelowana będzie rozkładem lognormalnym oraz Weibulla.

2. Wstęp teoretyczny

2.1 Rozkład logarytmiczno-normalny

Jest to rozkład, który interpretuje się następująco: jeśli zmienna losowa X ma rozkład normalny, wówczas zmienna losowa Y postaci:

$$Y = e^X$$

ma rozkład logarytmiczno-normalny. Parametrami tego rozkładu są $\mu = E(X)$ oraz $\sigma = Var(X)$.

Funkcja gęstości tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2} \right),$$

gdzie $y > 0$ oraz $\sigma > 0$.

Wartość oczekiwana rozkładu logarytmiczno-normalnego wynosi:

$$E(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right),$$

natomiast wariancja:

$$Var(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

Wartość oczekiwana zmiennej X może przyjmować dowolne wartości, natomiast wartość oczekiwana zmiennej Y jest liczbą dodatnią.

Rozkład ten nadaje się do modelowania wielkości odszkodowań charakteryzujących się lewostronną skośnością i dużą masą prawdopodobieństwa mieszczącą się poniżej wartości średniej.

Parametry rozkładu logarytmiczno-normalnego wyrażają wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe związanego z nim zależnością logarytmiczną rozkładu normalnego. W naszym modelu wygodniej jednak będzie się posługiwać jako parametrami odpowiednimi wielkościami właśnie dla rozkładu logarytmiczno-normalnego – pozwoli to dokładniej „sterować” przebiegiem procesu. Dlatego, aby uzależnić μ i σ od $E(Y)$ oraz $Var(Y)$, rozwiązujemy ze względu na μ i σ następujący układ równań:

$$\begin{cases} E(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ Var(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \ln(E(Y)) = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \\ \ln(Var(Y)) = 2\mu + \sigma^2 + \ln\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \end{cases},$$

W drugim równaniu powyższego układu ostatni składnik prawej strony równości nie jest liniowo separowalny, co uniemożliwia analityczne rozwiązanie układu. Jednakże dla dużych

x wartości $\ln(x)$ oraz $\ln(x-1)$ są sobie bliskie, można więc skorzystać z następującego przybliżenia:

$$\ln\left(e^{\sigma^2}-1\right)\approx\ln\left(e^{\sigma^2}\right)=\sigma^2 .$$

Stąd łatwo otrzymujemy rozwiązanie zmodyfikowanego układu:

$$\begin{cases}\sigma=\sqrt{\dfrac{\ln(Var(Y))-2\ln(E(Y))}{3}}\\ \mu=\ln(E(Y))-\dfrac{\sigma^2}{2}\end{cases}.$$

Aby wyrażenie pod pierwiastkiem było nieujemne, musi zachodzić $\sqrt{Var(Y)}\geq E(Y)$.

2.2 Rozkład Weibulla

Jest to rozkład ciągły o funkcji gęstości postaci:

$$f(x;k,a)=(k/a)(x/a)^{(k-1)}e^{-(x/a)^k},$$

gdzie $x\geq 0$ oraz $k>0$ jest parametrem kształtu, a $a>0$ to parametr skali.

Dystrybuanta zadana jest wzorem:

$$F(x;k,a)=1-e^{-(x/a)^k},$$

gdzie oczywiście również $x\geq 0$.

Wartość oczekiwana rozkładu Weibulla wynosi:

$$E(X)=a\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

natomiast wariancja:

$$Var(X)=a^2\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-E(X)^2 .$$

W tym przypadku dopasowanie obu parametrów rozkładu do zadanej wartości oczekiwanej i wariancji nie jest już takie proste, ale dla ustalonego parametru k i zadanej wartości oczekiwanej, łatwo wyprowadzić wzór na a:

$$a=\frac{E(X)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}.$$

Rozkład ten należy do kategorii rozkładów wartości ekstremalnych, stąd w teorii aktuarialnej wykorzystywany jest do modelowania wartości szkód pochodzących ze zdarzeń katastrofalnych.

2.3 Proces ryzyka

Niech (Ω,F,P) będzie przestrzenia probabilistyczna oraz:

1) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ będzie procesem punktowym, tj. procesem stochastycznym o wartościach całkowitych z $N_0 = 0$ p.w., $N_t < \infty$ dla każdego $t < \infty$ oraz z niemalejącymi trajektoriami,
2) $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ będzie niezależnym ciągiem dodatnich i niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie,

wtedy proces ryzyka $\{R_t\}_{t\geq 0}$ definiujemy jako:

$$R_t = u + c(t) - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \ ,$$

gdzie: $\{N_t\}_{t\geq 0}$ to proces punktowy zgłaszania żądań, $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ to niezależny ciąg wielkości żądań (ciąg dodatnich i niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie o danej średniej), u to nieujemna stała reprezentująca kapitał początkowy firmy, a $c(t)$ jest funkcją składki.

2.4 Jednorodny proces Poissona

Proces stochastyczny w czasie ciągłym $\{N_t : t \geq 0\}$ nazywamy jednorodnym procesem Poissona z intensywnością λ>0, jeśli:

1) $\{N_t\}$ jest procesem punktowym, oraz
2) czasy oczekiwania są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym ze średnią 1/ λ.

2.5 Niejednorodny proces Poissona

Proces ten można traktować jako proces Poissona o zmiennej intensywności opisanej funkcją deterministyczną $\lambda(t)$. Może być on stosowany w sytuacjach, gdy momenty pojawiania się żądań zależą od pory roku, czy dnia tygodnia. Jego przyrosty nie muszą być stacjonarne.

2.6 Proces odnowy

Jeżeli czasy oczekiwania W_i są niezależne i mają taki sam nieujemny rozkład, to definiują one proces odnowy. W takim razie jednorodny proces Poissona jest jego szczególnym przypadkiem.

3. Uwarunkowania modelu

Model – tam, gdzie będzie to możliwe – zostanie dostosowany do danych rzeczywistych. Case study wykonamy dla wyników finansowych z „Raportu rocznego 2004" TU Allianz Polska S.A. Pozwoli to sprawdzić, jakim ryzykiem był obarczony jeden z najpopularniejszych ubezpieczycieli.

Suma składek za rok 2004 wyniosła 473,099 mln PLN. Załóżmy, że ich wpływ był równomiernie rozłożony w czasie. Jeżeli przyjmiemy, że rok ma 360 dni (dość częste uproszczenie w obliczeniach finansowych), otrzymamy przeciętny dzienny przychód ze składek:

$$\frac{473,099}{360} = 1,015789 \left[\frac{\text{mln PLN}}{\text{dzień}} \right].$$

Suma odszkodowań i świadczeń za rok 2004 wyniosła 285,597 mln PLN. Jeżeli przyjmiemy, stałą intensywność procesu Poissona λ = 1, to – przeciętnie rzecz biorąc – powinno nastąpić 360 wypłat w przyjętym okresie 360 dni, czyli jedna dziennie. Przeciętna dzienna wypłata świadczeń i odszkodowań wyniosła więc:

$$\frac{285,597}{360} = 0,793325 \text{ mln PLN.}$$

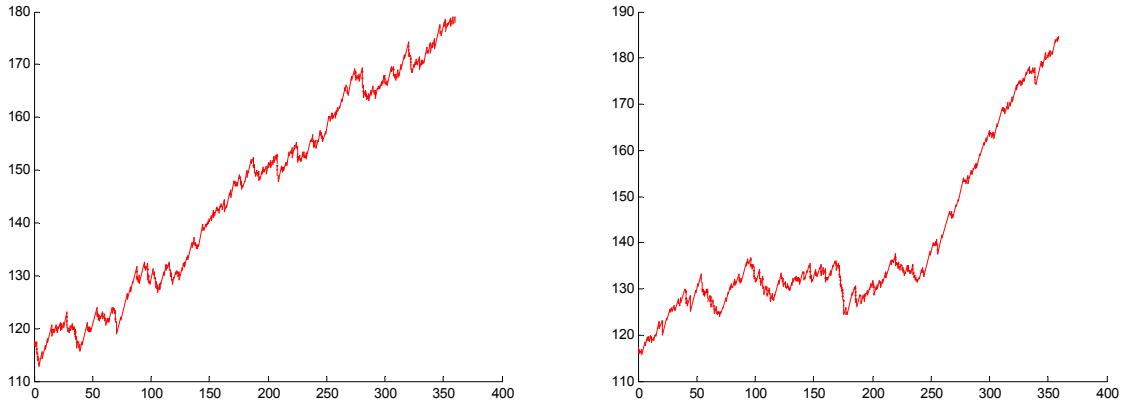
Za kapitał początkowy przyjmijmy wielkość środków własnych na pokrycie marginesu wypłacalności z początku 2004 r. równą 116,849 mln PLN.

W pozostałych przypadkach parametry zostaną dobrane tak, aby proces był zrównoważony.

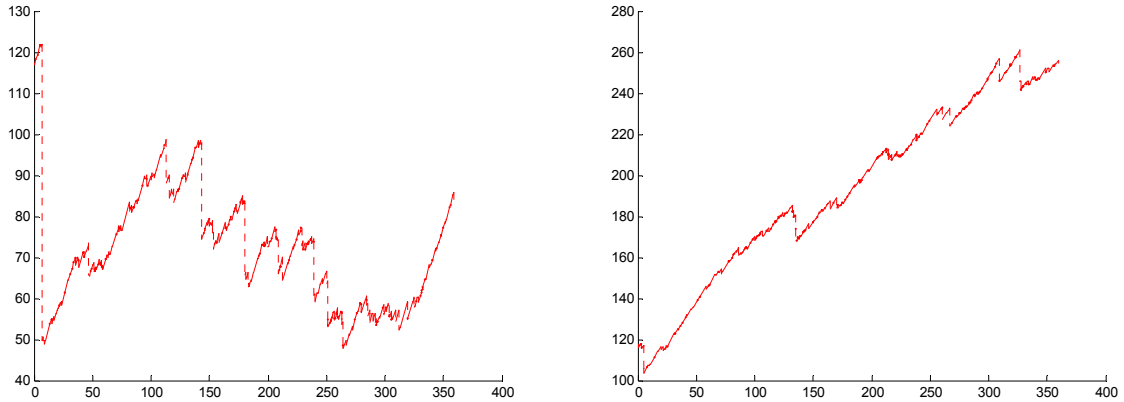
4. Model jednorodnego procesu Poissona

4.1 Wielkość szkód – rozkład logarytmiczno-normalny

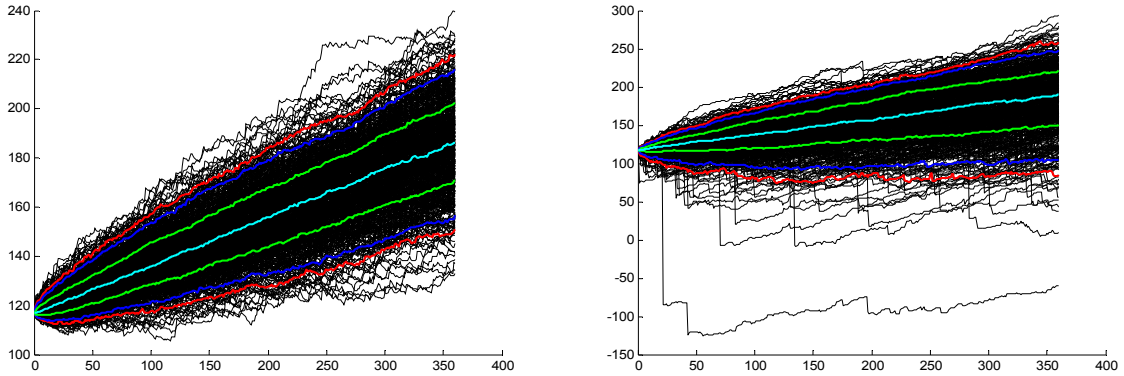
Model oparty na logarytmiczno-normalnym rozkładzie wielkości jednorazowej wypłaty charakteryzuje się dość monotonnymi przebiegami. Gdy odchylenie standardowe wynosi 1 (rys. 1), wartość kapitału systematycznie wzrasta, ponieważ brak jest większych wypłat. Zwiększenie odchylenia standardowego do 24 powoduje, że czasem pojawiają się przebiegi zawierające szkody katastrofalne (lewa część rys. 2), ale równie często występują przebiegi o niskich rozmiarach szkód (prawa część rys. 2).



Rys. 1. Przykładowe przebiegi procesu o u=116,849, c(t)=1,015789 T=360, λ=1, E(Y)=0,793325 i $\sqrt{Var(Y)}=1$.



Rys. 2. Przykładowe przebiegi procesu o u=116,849, c(t)=1,015789 T=360, λ=1, E(Y)=0,793325 i $\sqrt{Var(Y)}=24$.



Rys. 3. 500 przebiegów analizowanych procesów o $\sqrt{Var(Y)}=1$ i $\sqrt{Var(Y)}=24$ oraz linie kwantylowe.

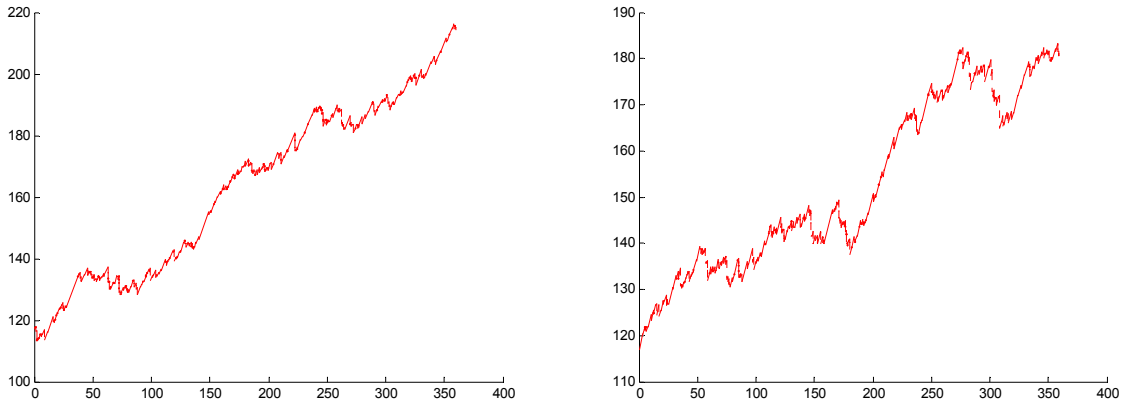
Do podobnych wniosków dochodzimy, analizując wykresy (rys. 3) 500 przebiegów wraz z liniami kwantylowymi (błękitny – kwantyl rzędu 0,5, zielony – 0,2 i 0,8, niebieski – 0,05 i 0,95, czerwony – 0,025 i 0,975).

W przypadku niskiego odchylenia standardowego dziennej wypłaty wartość kapitału ubezpieczyciela pod koniec roku zawsze jest co najmniej równa wartości z początku badanego okresu, a spadki poniżej tej wartości są w ciągu roku nieliczne i niewielkie. Prawdopodobieństwo ruiny oczywiście wynosi 0.

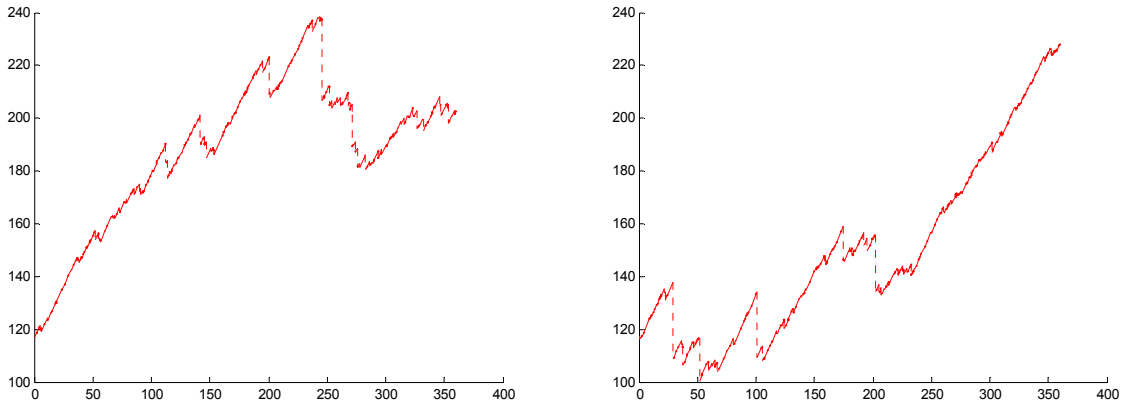
W drugim przypadku widoczne są pojedyncze przebiegi o szkodach katastrofalnych. Są jednak na tyle nieliczne, że prawdopodobieństwo ruiny wynosi jedyni 0,6%. Biorąc pod uwagę rozmiar odchylenia standardowego (24) wypłaty w porównaniu do jej średniej wysokości (0,793325) oraz wielkości zebranej dziennej składki (1,015789), można stwierdzić, iż TU Allianz Polska S.A. było przygotowane pod względem finansowym w roku 2004 nawet na wystąpienie kilku szkód katastrofalnych.

4.2 Wielkość szkód – rozkład Weibulla

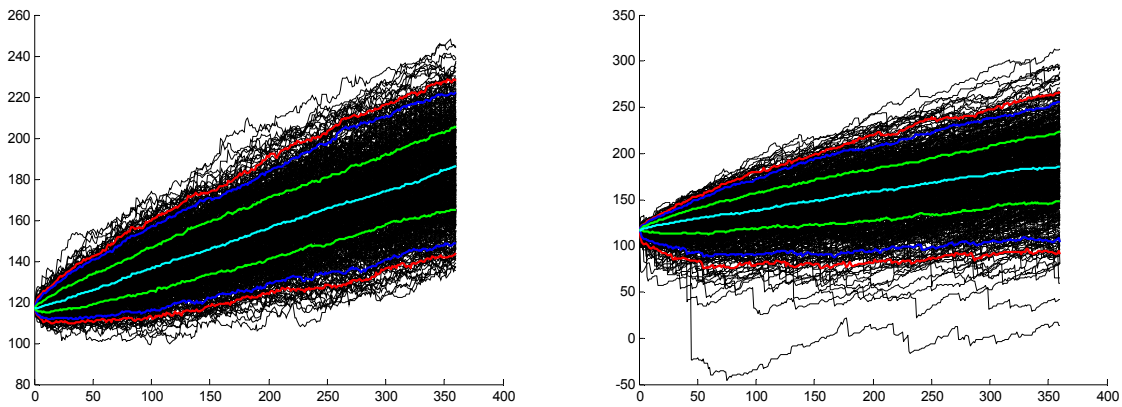
Gdy do modelowania wysokości szkód zastosujemy rozkład Weibulla, otrzymamy podobne przebiegi, jak w poprzednim przypadku. Przyjmując parametr kształtu $k = 1$, obserwujemy systematyczny wzrost wartości kapitału, bez większych spadków Odchylenie standardowe wysokości dziennej wypłaty wynosi 0,7933, a prawdopodobieństwo ruiny (na podstawie 500 symulacji) jest równe zero.



Rys. 4. Przykładowe przebiegi procesu o u=116,849, $c(t)$=1,015789 T=360, λ=1, E(Y)=0,793325 i k=1.



Rys. 5. Przykładowe przebiegi procesu o u=116,849, $c(t)$=1,015789 T=360, λ=1, E(Y)=0,793325 i k=0,4.



Rys. 6. 500 przebiegów analizowanych procesów o k=1 i k=0,4 oraz linie kwantylowe.

Zmniejszenie parametru kształtu do wartości k=0,4, powoduje wyraźne zmiany. Co prawda ogólna tendencja wzrostowa nie zmienia się, ale wyraźnie słabnie i pojawiają się w niektórych przebiegach szkody katastrofalne. Odchylenie standardowe wysokości dziennych odszkodowań wzrasta do 2,4917, a prawdopodobieństwo ruiny wynosi 0,2%. Jest to dobry wynik. Paradoksalnie może nawet lepszy od poprzedniego, gdyż tak zdecydowany wzrost kapitału w czasie jak w lewej części rys. 6 może oznaczać, że cena polisy została ustanowiona na zbyt wysokim poziomie i świadomi tego konkurenci z pewnością taką sytuację wykorzystają. Dlatego raczej drugi model jest bliższy rzeczywistości. Niezależnie od tego, otrzymane wyniki potwierdzają wcześniejsze wnioski o dobrej sytuacji finansowej firmy.

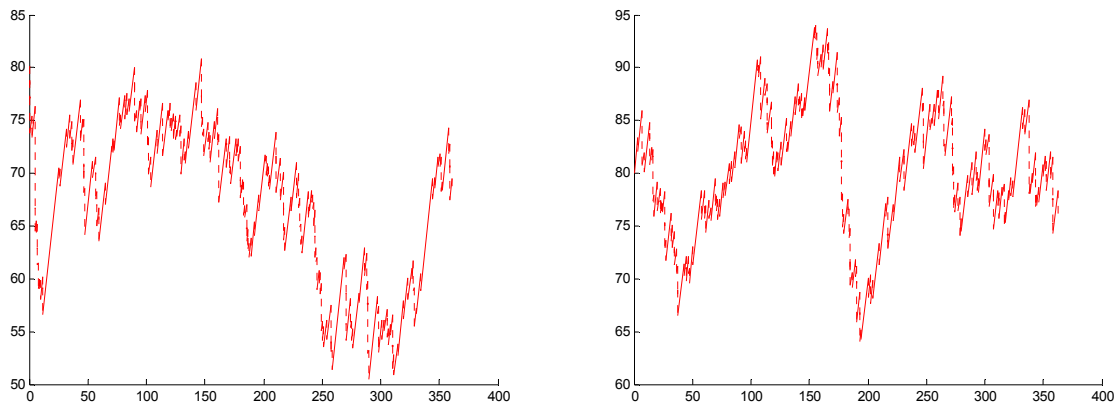
5. Model niejednorodnego procesu Poissona

Aby nieco urozmaicić sytuację, w modelu dla niejednorodnego procesu Poissona, zmodyfikujemy parametry. Wartość oczekiwana dziennego odszkodowania wzrośnie do E(Y) = 2, a kapitał początkowy obniżymy do u = 80.

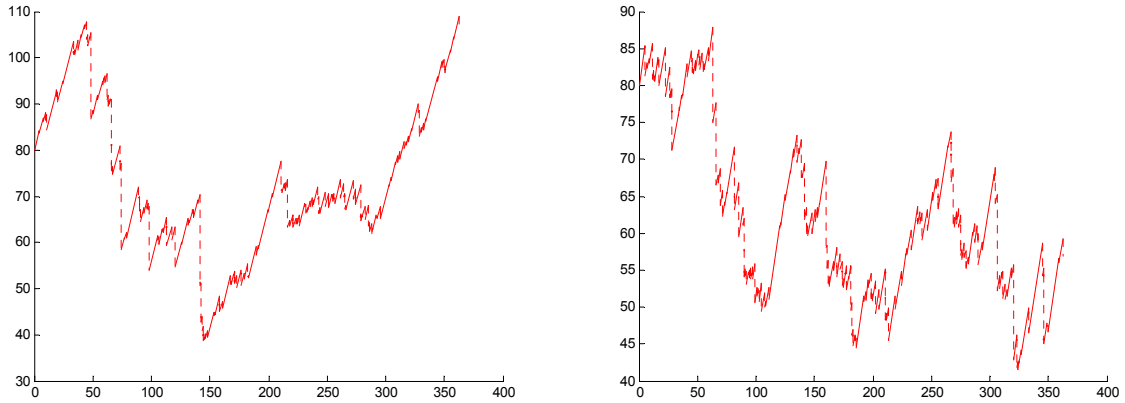
Do modelowania tego procesu posłużymy się się metodą Thinning. Wymaga ona przyjęcia pewnej stałej $\bar{\lambda}$ spełniającej nierówność $\lambda(t) \le \bar{\lambda}$. Ponieważ $\lambda(t) = 1 + \sin(2\pi t)$ łatwo zauważyć, iż najmniejszą wartością parametru $\bar{\lambda}$ spełniającą tę zależność dla każdego t jest $\bar{\lambda}$ = 2 i taką właśnie wartość przyjmiemy w dalszych rozważaniach.

5.1 Wielkość szkód – rozkład logarytmiczno-normalny

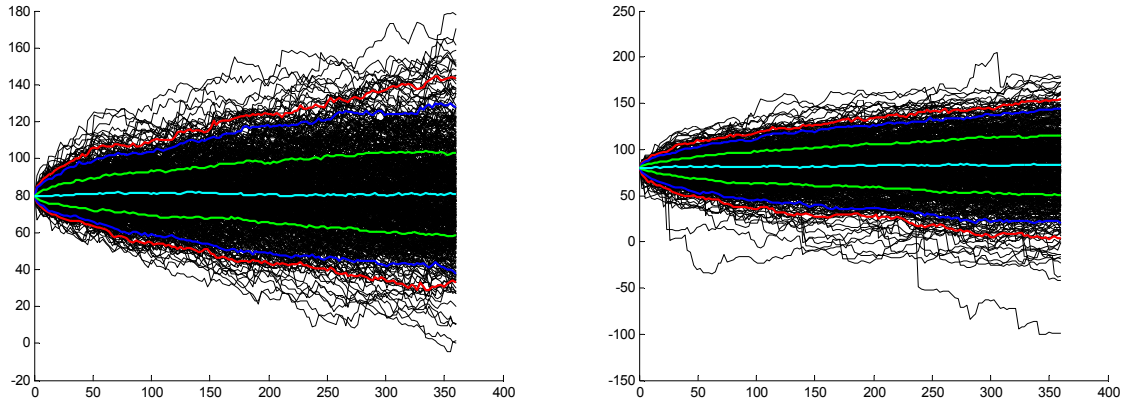
Otrzymane w tym przypadku przebiegi charakteryzują się występowaniem okresów w których dominują spadki oraz okresów o przewadze wzrostu wartości kapitału. Wielkość spadków zależy od odchylenia standardowego, co dobrze obrazują wykresy kwantylowe (rys. 9). Generalnie proces jest zrównoważony, zdarzają się jednak przebiegi kończące się mocno powyżej lub znacznie poniżej wartości początkowej. Gdy zwiększymy odchylenie standardowe dziennego odszkodowania z 3 do 10, pojawiają się pojedyncze przebiegi o szkodach katastrofalnych. Także inne przebiegi znajdujące się poniżej przeciętnej, przyjmują niższe wartości, niż w przypadku z mniejszym odchyleniem. Świadczy o tym obniżenie się linii kwantylowych dla niższych rzędów, przy braku większych zmian dla kwanyli wyższych rzędów. Różnice te objawiają się także w prawdopodobieństwie ruiny – w pierwszym przypadku wynosi ono 0,8%, w drugim wzrasta ponad dziesięciokrotnie do 9,4% – ta wielkość jest już niepokojąca.



Rys. 7. Przykładowe przebiegi procesu o u=80, c(t)=1,015789 T=360, $\overline{\lambda}$ = 2, E(Y) = 2 i $\sqrt{Var(Y)} = 3$.



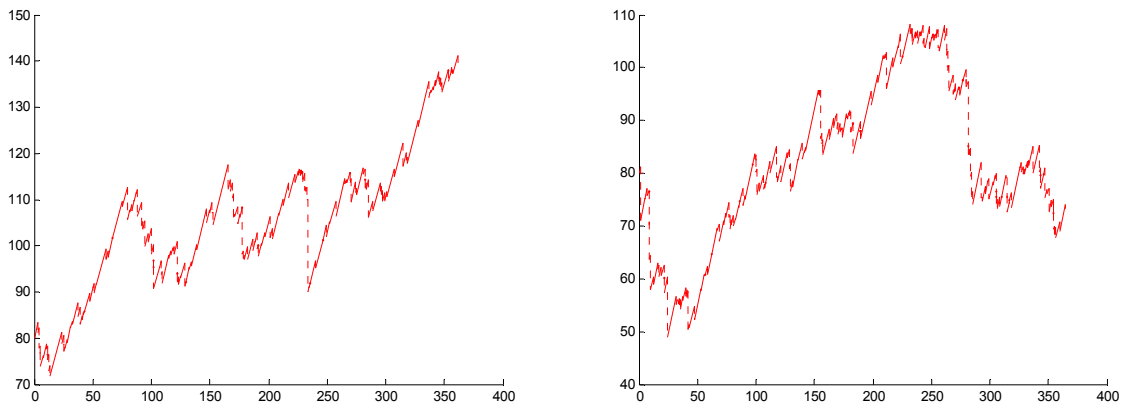
Rys. 8. Przykładowe przebiegi procesu o u=80, c(t)=1,015789 T=360, $\overline{\lambda}$ = 2, E(Y) = 2 i $\sqrt{Var(Y)} = 10$.



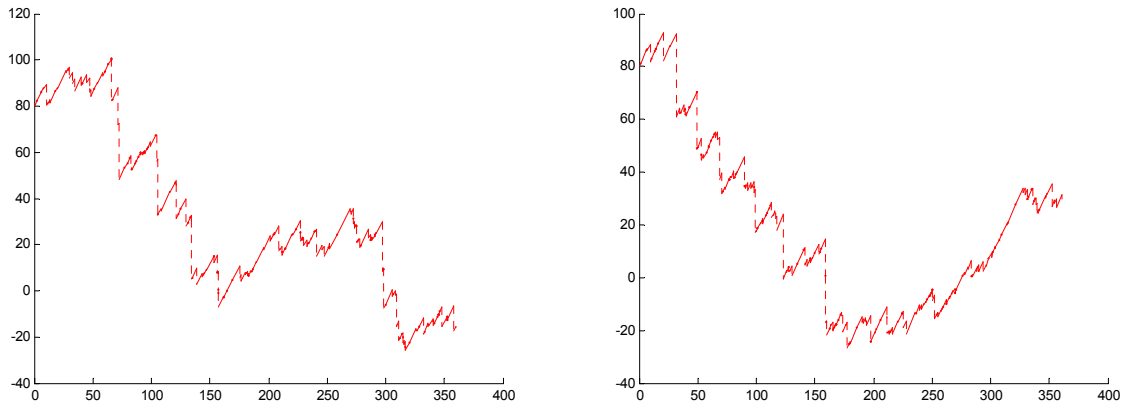
Rys. 9. 500 przebiegów analizowanych procesów o $\sqrt{Var(Y)} = 3$ i $\sqrt{Var(Y)} = 10$ oraz linie kwantylowe.

5.2 Wielkość szkód – rozkład Weibulla

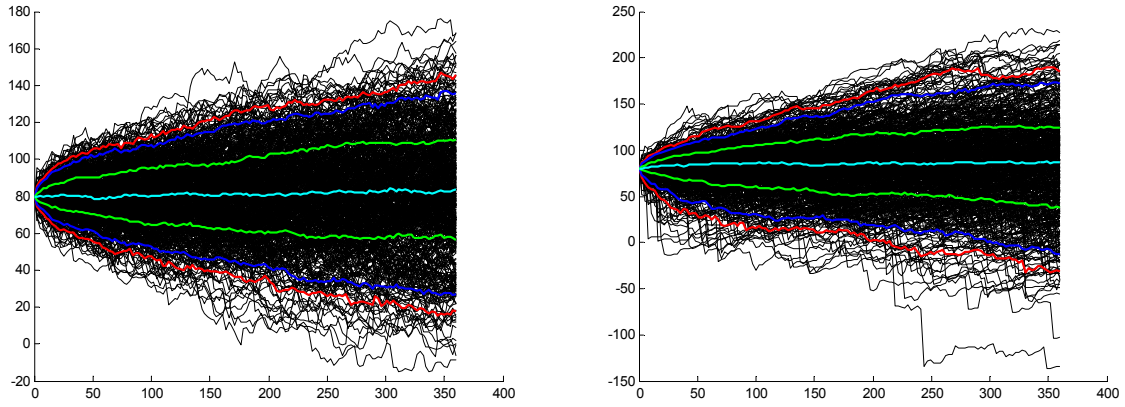
Dla niejednorodnego procesu Poissona z wysokościami odszkodowań o rozładzie Weibulla tak dobrano parametr kształtu tego rozkładu, by otrzymać proces zrównoważony. Udało się to dla k = 1. Odchylenie standardowe wyniosło wtedy 2. Przebiegi charakteryzują się występowaniem pojedynczych dużych szkód. Są one jednak na tyle rzadkie, że zdecydowana większość przebiegów znajduje się powyżej zera i prawdopodobieństwo ruiny jest małe – wynosi 2,8%.



Rys. 10. Przykładowe przebiegi procesu o u=80, c(t)=1,015789 T=360 $\overline{\lambda}$ = 2, E(Y) = 2 i k=1.



Rys. 11. Przykładowe przebiegi procesu o u=80, c(t)=1,015789 T=360 $\overline{\lambda}$ = 2, E(Y) = 2 i k=0,5.



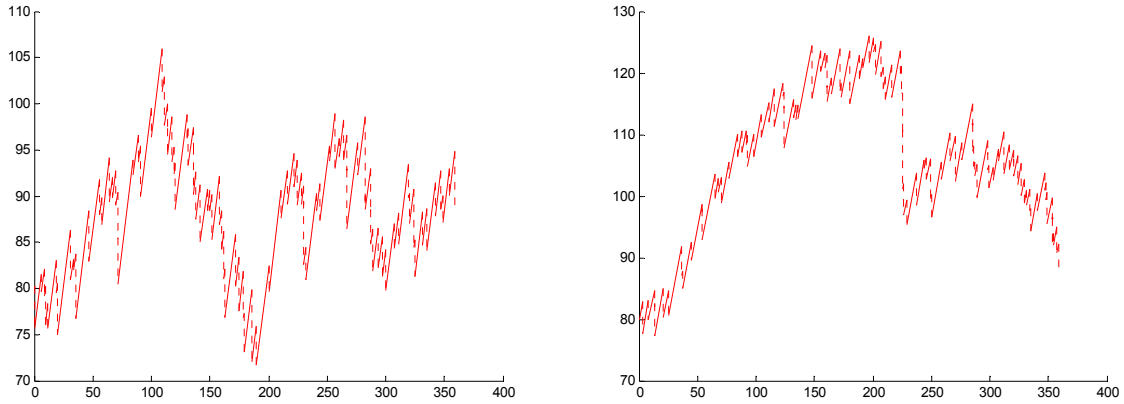
Rys. 12. 500 przebiegów analizowanych procesów o k=1 i k=0,5 oraz linie kwantylowe.

Zmniejszenie parametru kształtu do wartości k = 0,5, powoduje wzrost odchylenia standardowego (do 4,4721) i znaczne zwiększenie się prawdopodobieństwa ruiny – tym razem wynosi ono 17,8%, czyli ponad 6 razy więcej. Często występują duże szkody. Na wykresie kwantylowym (po prawej stronie rys. 12) widoczne są przebiegi znajdujące się znacznie poniżej dolnych kwantyli. Nie ma zaś przebiegów wykraczających w podobnym stopniu ponad górne kwantyle (co miało miejsce chociażby dla k = 1).

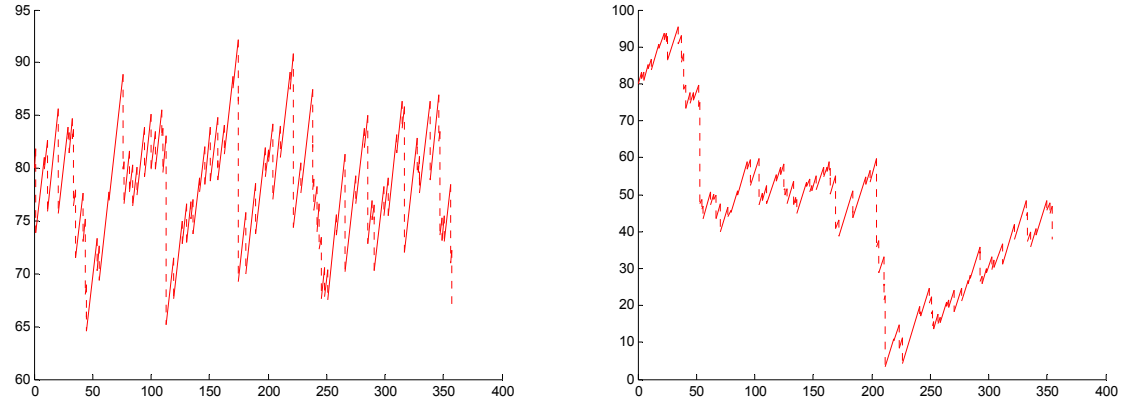
6. Model odnowy

W modelu odnowy czasy oczekiwania nie muszą mieć rozkładu wykładniczego. Dlatego w analizowanym przypadku czas ten będzie określony zmienną losową $|X|$, gdzie X ma rozkład $N(3,4)$.

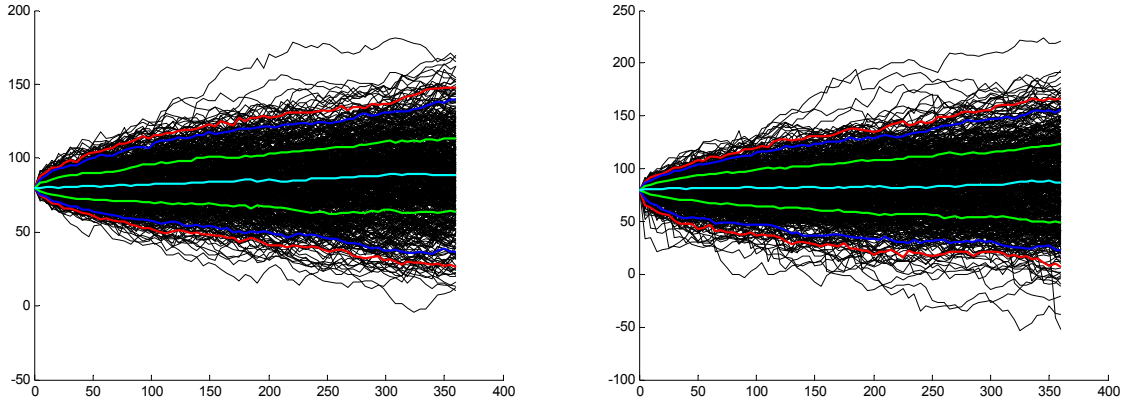
6.1 Wielkość szkód – rozkład logarytmiczno-normalny



Rys. 13. Przykładowe przebiegi procesu o u=80, c(t)=1,015789 T=360, μ=3, σ=4, E(Y)=4 i $\sqrt{Var(Y)}=5$.



Rys. 14. Przykładowe przebiegi procesu o u=80, c(t)=1,015789 T=360, μ=3, σ=4, E(Y)=4 i $\sqrt{Var(Y)}=10$.



Rys. 15. 500 przebiegów analizowanych procesów o $\sqrt{Var(Y)}=5$ i $\sqrt{Var(Y)}=10$ oraz linie kwantylowe.

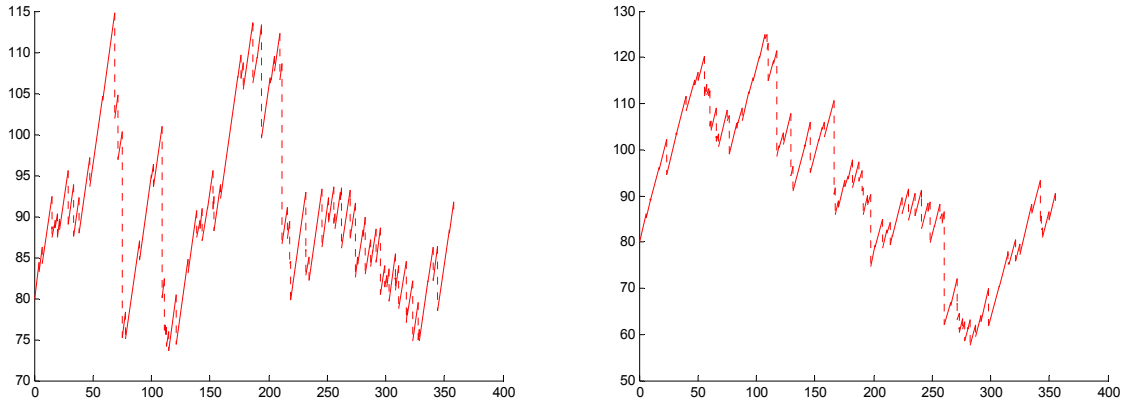
Przyjmujemy wartość oczekiwaną dziennych odszkodowań równą 4, a odchylenie standardowe w pierwszym wariancje 5 oraz 10 w drugim. Skoro przeciętny czas oczekiwania wynosi 3 (czyli wypłaty powinny pojawiać się 3 razy rzadziej niż w jednorodnym procesie Poissona), a odchylenie standardowe równe jest 4, należy się spodziewać zarówno okresów o jednostajnym wzroście kapitału (duży czas oczekiwania), jak i o licznych (być może i poważnych) spadkach (kilka krótkich czasów oczekiwania pod rząd). Sytuacje takie można zauważyć w przykładowych przebiegach na rys. 13 i 14.

Wykresy kwantylowe (rys. 15) pokazują, że proces jest zrównoważony. Dobrze widoczny jest wpływ odchylenia standardowego dziennej wypłaty – rozrzut wartości jest wyraźnie większy przy większej wariancji. Przejawia się to również w różnych wartościach prawdopodobieństwa ruiny – przy mniejszym odchyleniu (równym 5) wynosi ono 1,4%, a przy dwukrotnie większym 4,6%.

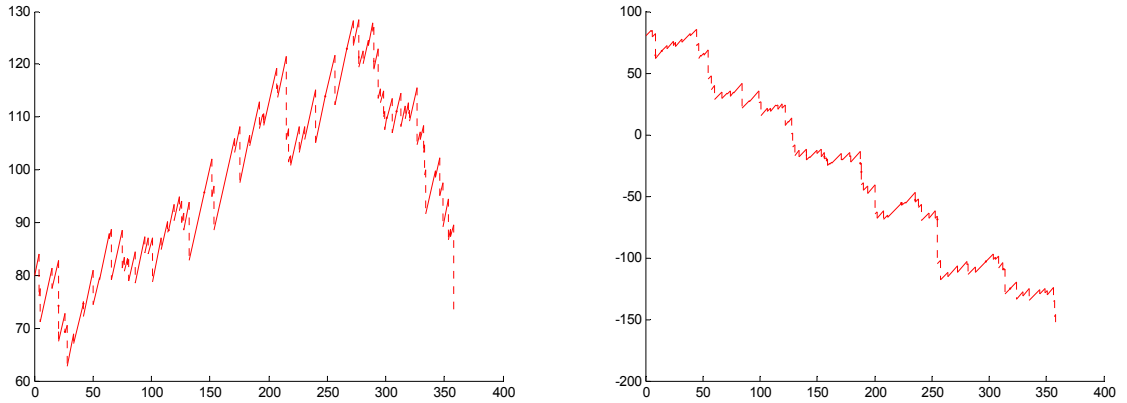
6.2 Wielkość szkód – rozkład Weibulla

W ostatnim modelu dokonamy lekkiej modyfikacji – tym razem nie będziemy posługiwać się, jak poprzednio, wartością oczekiwaną dziennej wypłaty odszkodowań, lecz parametrem skali a. Natomiast parametr kształtu k będzie stale równy 1.

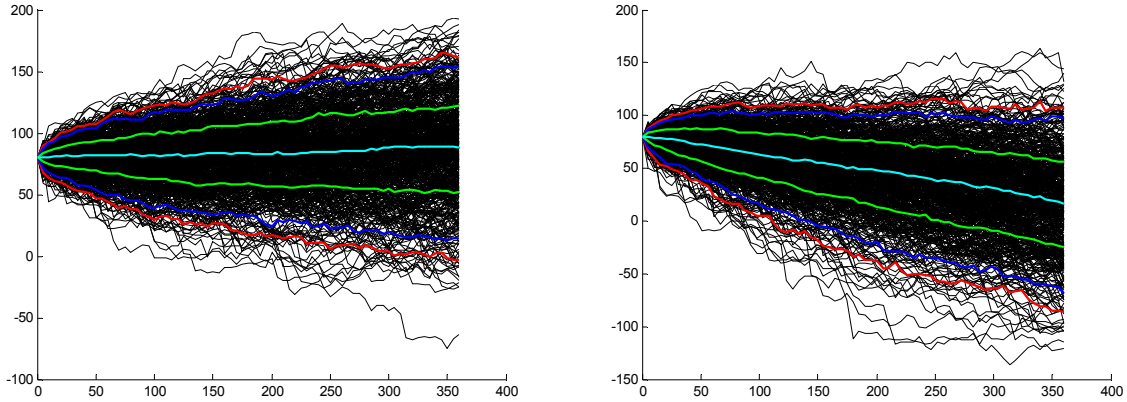
Gdy a=1 proces jest zrównoważony. Pojawiają się dość duże wartości odszkodowań, co jest charakterystyczne dla rozkładu Weibulla, gdyż jest wykorzystywany w teorii wartości ekstremalnej. Widoczne też są zgrupowania oraz dłuższe przerwy w momentach wypłat, wynikające z przyjętych parametrów rozkładu normalnego.



Rys. 16. Przykładowe przebiegi procesu o u=80, c(t)=1,015789 T=360, μ=3, σ=4, a=4 i k=1.



Rys. 17. Przykładowe przebiegi procesu o u=80, c(t)=1,015789 T=360, μ=3, σ=4, a=5 i k=1.



Rys. 18. 500 przebiegów analizowanych procesów o a=1 i a=5 oraz linie kwantylowe.

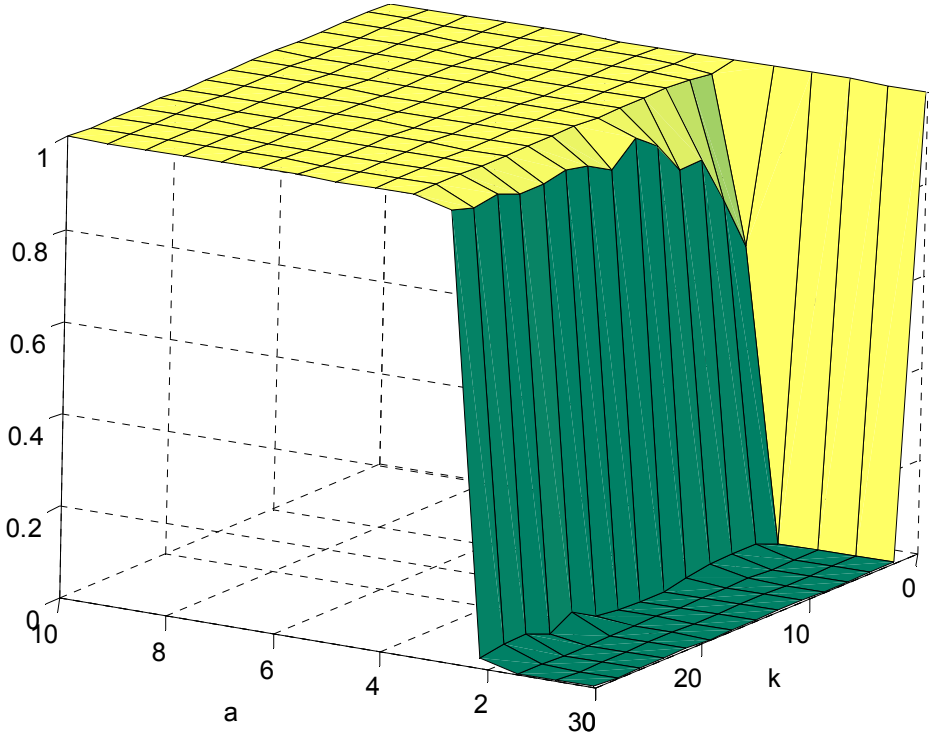
Zwiększenie parametru skali objawia się sporym wzrostem prawdopodobieństwa ruiny – z 7,2% do 57,6%. Przyczyniają się do tego znacznie większe wartości zmiennej losowej odpowiadającej za wysokość odszkodowań. Pojawiają się przebiegi o dość znacznej liczbie szkód katastrofalnych, co widoczne jest szczególnie w prawej części rys. 17 (może nie wygląda to przekonująco na pierwszy rzut oka, ale wystarczy porównać skalę na osi y z sąsiednimi rysunkami).

7. Wnioski

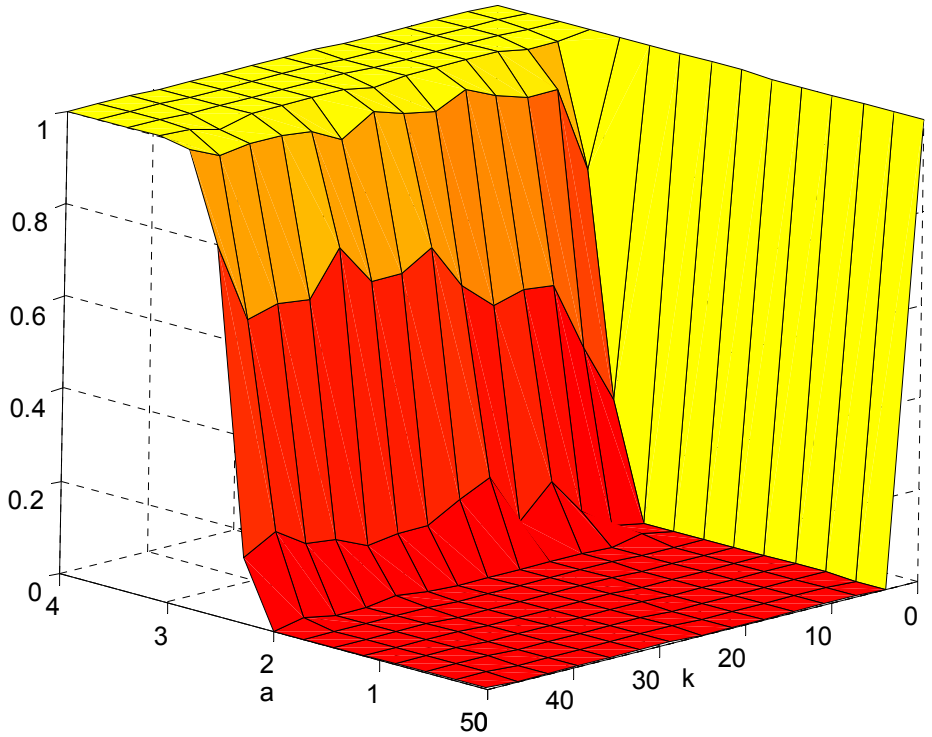
Symulacje przeprowadzone na danych rzeczywistych przy doborze sensownej wielkości parametrów, wykazały, że towarzystwa ubezpieczeniowe mają dobrą sytuację finansową i są przygotowane na pojawienie się strat katastrofalnych. Dodatkowo należy pamiętać o tym, że przy wysokim prawdopodobieństwie poniesienia dużych strat łącznych (szczególnie, gdy ubezpiecza się jeden lub kilka dużych i ryzykownych podmiotów), portfel jest reasekurowany (lub koasekurowany), co pozwala rozłożyć obciążenia finansowe pomiędzy kilku ubezpieczycieli i zmniejsza prawdopodobieństwo ruiny.

Analiza procesów opartych na dowolnie przyjętych danych pokazuje, że, aby modelować proces ryzyka, należy najpierw dobrze oszacować jego parametry, gdyż czasem nawet niewielkie różnice mogą znacznie wpływać na uzyskiwane wyniki. Dobrze obrazują to rysunki 19. i 20. Niewielkie zmiany parametru a na przedziale od 2 do 3, powodują gwałtowny wzrost prawdopodobieństwa ruiny, praktycznie niezależnie od wartości parametru k. Widać też, jak wąski jest przedział parametru a, dla którego uzyskujemy satysfakcjonujące prawdopodobieństwa ruiny oraz istotny wpływ parametru kształtu na uzyskiwane wyniki jedynie przy niskich jego wartościach.

Niestety, z powodu niedostatecznej mocy obliczeniowej komputera, udało mi się przeprowadzić takie symulacje tylko dla 2 z 6 analizowanych przypadków.



Rys. 19. Zależność prawdopodobieństwa ruiny od wartości parametrów skali i kształtu rozkładu Weibulla w jednorodnym procesie Poissona dla 100 przebiegów o parametrach u=116,849, $c(t)$=1,015789 T=360, λ=1.



Rys. 20. Zależność prawdopodobieństwa ruiny od wartości parametrów skali i kształtu rozkładu Weibulla w niejednorodnym procesie Poissona dla 100 przebiegów o parametrach u=80, $c(t)$=1,015789 T=360, $\overline{\lambda}$ = 2.